Jeux dynamiques relatifs au changement climatique

Rémy Dullieux

Université Paris I - Panthéon Sorbonne
U.F.R. de sciences économiques

Année 2013

Numéro attribué par la bibliothèque
| | | | | | | | | | | | | |

THÈSE

Pour l'obtention du grade de
Docteur de l'Université de Paris *I*
Discipline : Sciences Economiques

Présentée et soutenue publiquement par

Rémy Dullieux

le 7 juin 2013

Dynamic Games relative to climate change

Directrice de thèse : Katheline Schubert

JURY :

Antoine d'Autume	Professeur à l'Université Paris 1 Panthéon Sorbonne
Lionel Ragot	Professeur à l'Université Paris 10 (rapporteur)
Gilles Rotillon	Professeur émérite à l'Université Paris 10 Nanterre (rapporteur)
Katheline Schubert	Professeur à l'Université Paris 1 Panthéon Sorbonne
Mabel Tidball	Directrice de Recherches INRA

L'université Paris I Panthéon-Sorbonne n'entend donner aucune approbation ni improbation aux opinions émises dans cette thèse. Ces opinions doivent être considérées comme propres à leur auteur.

Je remercie les professeurs qui m'ont permis de mener à bien ce travail : d'abord Katheline Schubert qui a été ma directrice de thèse, et ensuite Lionel Ragot et Antoine d'Autume.

Table of Contents

Chapter I

Introduction

Le présent travail est consacré à l'étude de jeux différentiels dans le domaine du changement climatique.

Le domaine exploré se situe plus précisément à l'intersection de l'économie des ressources non renouvelables et de l'économie de la pollution. Par ressources naturelles non renouvelables il convient d'entendre ici les énergies fossiles. Quant à la pollution étudiée, il s'agit de l'accumulation de CO_2 dans l'atmosphère qui a pour conséquence un réchauffement climatique créant un dommage environnemental.

Cette intersection est tout sauf un ensemble vide à cause de l'accumulation excessive de CO_2 dans l'atmosphère due à la consommation d'énergies fossiles telles que le charbon, le pétrole et le gaz qui sont des ressources non renouvelables[1]. De là l'idée d'une taxe carbone sur la consommation d'énergie fossile, mondiale si possible, pour internaliser cet effet externe négatif (ou le système équivalent, sous certaines conditions, des permis). Ces projets tardent certes à se concrétiser pour de multiples raisons, que ce soit l'opposition des Etats - Unis à toute taxation de ce type, que ce soit la résistance de l'opinion ou encore la crise économique qui freine les ardeurs réformatrices. A titre d'exemple, il n'y a pas de taxe carbone en France à ce jour et le seul instrument en place est le système européen des permis, qui monte en charge

[1] Du point de vue des gaz à effet de serre, le charbon est approximativement deux fois plus polluant que le pétrole et quatre fois plus polluant que le gaz.

progressivement et est bien adapté aux grosses installations industrielles mais qui ne règle en rien la question de la maîtrise des consommations fossiles des particuliers.

Malgré toutes ces difficultés, l'idée d'une taxe carbone nationale, européenne ou même mondiale continue d'être débattue.

On s'intéresse ici à des jeux autour de cette idée de taxe carbone: on suppose que les pays consommateurs franchissent une étape supplémentaire par rapport à la seule internalisation du dommage climatique et qu'en mettant en place des taxes de type taxe carbone ils poursuivent des finalités stratégiques. Les jeux considérés sont des jeux non coopératifs et dynamiques (qui se déroulent donc sur un horizon de temps) et dont un des objectifs principaux est d'examiner sur cet horizon les interactions stratégiques entre d'une part des pays consommateurs cartellisés sous la direction d'un régulateur unique et mettant en place des taxations de type taxe carbone et d'autre part des producteurs cartellisés et utilisant le levier prix pour maximiser leur bien - être. On notera qu'au plan théorique on sort d'une conception purement idéale, c'est - à - dire parétienne, de la taxe carbone. Ce point de vue n'est jamais mis en avant bien entendu par les pays consommateurs mais on peut penser qu'il n'est pas sans fondement concret quand on voit l'opposition ferme des pays de l'OPEP dans les instances internationales à toute idée de mise en place d'une taxe carbone: eux savent bien que cette taxe pourrait être un moyen de nuire à la maximisation de leur rente! Il y a bien sûr une abstraction dans l'idée que la zone des consommateurs peut faire bloc et être sous la férule d'un régulateur unique chargé d'optimiser son bien - être. La cartellisation des producteurs est une idée plus conforme à l'expérience des ces quarante dernières années, même si elle est vraie surtout pour le pétrole et dans une moindre mesure pour le gaz mais sans doute pas pour le charbon qui est en outre beaucoup plus abondant.

Quels peuvent donc être les objectifs stratégiques poursuivis par les pays consommateurs lorsqu'ils jouent un jeu non coopératif avec les producteurs, étant entendu que ceux poursuivis par les producteurs sont naturellement la maximisation du profit tiré de leur rente[2] pétrolière ? En fait il s'agit pour les pays consommateurs de capturer justement une partie de cette rente par le truchement de comportements stratégiques, ou en termes plus précis d'accroître leur bien - être dans ces jeux par rapport à une situation dans laquelle ils seraient passifs en face des producteurs. Cela amène à une composante non Pigouvienne dans la taxe carbone qui est le résultat de ce comportement stratégique.

On peut aussi penser que les pays consommateurs ne forment pas un seul bloc et qu'il peut y avoir plusieurs blocs de pays consommateurs avec des visions différentes voire divergentes en matière de réchauffement climatique. Les réunions internationales consacrées à cette question ces dernières années montrent amplement que cette fracture, cette rivalité même, est susceptible d'exister avec d'ailleurs des points de vue multiples. C'est pourquoi on a étudié aussi des jeux dans lesquels il n'y a pas un seul bloc de pays consommateurs mais deux blocs[3] de consommateurs: un bloc de vieux pays riches a priori motivés pour lutter contre le réchauffement climatique et un bloc de pays pauvres et émergents qui peuvent souffrir du dommage environnemental mais ne cherchent pas spontanément à le contrer. Ce dernier bloc sera supposé rechercher un transfert de la part des vieux pays riches comme préalable à la mise en place d'une taxe carbone dans sa propre zone et les vieux pays riches seront supposés accepter cette idée de transfert sous certaines conditions. La motivation du coté des vieux pays riches est qu'ils ont intérêt à une taxe carbone couvrant l'ensemble du monde et pas seulement leur territoire. S'agissant des pays pauvres les motivations sont autres. De nombreux pays pauvres sont dans l'incapacité d'introduire sans soutien une taxe carbone. Quant aux pays émergents, ils sont plus que réservés à une telle idée, ou ils réclament aux vieux pays industriels une aide pour la mettre en oeuvre. Certes certains d'entre eux deviennent de plus en plus riches, mais ils peuvent faire valoir que les pays occidentaux industrialisés

[2] On parle de rente parce que la ressource fossile est supposée non renouvelable.

[3] Comme on vient de le souligner, dans le monde réel il y a plus de deux blocs de pays consommateurs en termes d'attitude face au réchauffement climatique. Se limiter à deux blocs est donc une simplification.

depuis la fin du 18 ième siècle portent une responsabilité réelle dans l'accumulation depuis cette époque de CO_2 dans l'atmosphère. On peut aussi légitimement soutenir que le coût d'une politique active contre le réchauffement climatique est plus élevé pour les pays émergents que pour les vieux pays riches car leur niveau de richesse est encore inférieur à celui de ces pays au moins en moyenne.

On peut alors envisager des formes de coopération entre ces deux blocs pour limiter le réchauffement climatique face aux pays producteurs mais aussi l'éventualité de comportements de rivalité entre ces deux zones de consommation amenant à un jeu non coopératif entre elles.

Au total, trois jeux seront étudiés:

- un jeu non coopératif entre un bloc unifié de consommateurs et un bloc des producteurs, avec un plafond de pollution de CO_2 comme contrainte environnementale principale ; il s'inspire de l'idée mise en évidence par des les scientifiques et reprise par le GIEC de limite supérieure de concentration de CO_2 dont le dépassement amènerait des conséquences catastrophiques ; l'existence de cette contrainte modifie les résultats classiques de ce type de jeu ;

- un jeu non coopératif entre un des blocs de consommateurs (censé représenter les vieux pays riches) et un bloc des producteurs, mais dans lequel un second bloc de consommateurs (censé être celui des pays émergents et pauvres) met en place la même taxe carbone que le premier bloc de consommateurs en contrepartie d'un transfert de la part de ce premier bloc ; le second bloc de consommateurs ne joue pas dans le jeu mais son existence en modifie les conclusions ; une taxe carbone unique au plan mondiale peut alors être mise en place ; il apparaît notamment que sous certaines conditions le second bloc peut avoir intérêt à un tel schéma "taxe carbone contre transfert" ;

- un jeu non coopératif entre les deux zones de consommation, avec des producteurs passifs car le focus est mis ici sur les relations entre ces deux zones de consommation ; dans ce jeu il y a comme dans le jeu précédent un schéma "taxe carbone contre transfert" ; toutefois chacune des deux zones de consommation met en place la taxe carbone qui maximise ses intérêts et il n'y a donc pas de taxe carbone mondiale mais une taxe par blocs ; néanmoins cette situation peut être dans certaines conditions meilleure que la passivité face aux producteurs.

Ces jeux s'inscrivent dans un cadre analytique bien délimité. Ce sont des jeux différentiels - c'est à dire en temps continu - .

Ils s'inscrivent aussi dans une littérature théorique consacrée aux jeux différentiels bilatéraux relatifs aux ressources non renouvelables et à la pollution par le CO_2, qui s'est développée depuis une vingtaine d'années. Ce sont en effet des variations à partir de cette littérature par modification de certaines de ses hypothèses techniques et surtout économiques, de façon à mesurer les éventuels changements de résultats qui peuvent en découler.

Avant de présenter les jeux proposés il convient donc de rappeler quel est le cadre analytique des jeux différentiels et quelle est la littérature de référence qui a servi de base aux présents travaux.

1 Rappel sur les jeux différentiels

Les jeux différentiels sont une classe particulière des jeux dynamiques (parmi d'autres comme les jeux répétés). Ce sont des jeux dynamiques en ce sens que les actions des joueurs se déroulent sur une plage de temps (voire jusqu'à l'infini) et pas sur un seul instant, mais aussi et surtout parce que l'action de chaque joueur à tout instant peut tenir compte des actions des joueurs aux instants précédents, y compris les siennes. En d'autres termes, selon Dockner *et al.* (2000), dans les jeux dynamiques, "les joueurs devraient être capables de choisir des stratégies qui sont fondées sur l'information révélée durant le déroulement du jeu". Au sein des jeux dynamiques, les jeux différentiels sont, selon les mêmes auteurs, des jeux joués en temps continu et qui ont deux caractéristiques principales :

- il y a un certain nombre de variables d'état qui à tout instant caractérisent l'état du système dynamique que le jeu représente ;
- l'évolution de ces variables d'état est décrite par un ensemble d'équations différentielles.

Dans une synthèse récente relative aux jeux dynamiques, Long (2010) rappelle que les jeux dynamiques ont été introduits dès 1925 - 1927 par Roos mais se sont peu développés dans le domaine économique jusqu'aux années soixante - dix.

En ce qui concerne plus spécifiquement les jeux différentiels, leur créateur fut Isaacs dans le cadre de la Rand Corporation dans les années cinquante, mais leur essor dans le domaine économique date de ces vingt dernières années. Ils sont maintenant de plus en plus utilisés dans des domaines variés, comme l'économie industrielle, l'économie ou le commerce international ou encore l'économie des ressources naturelles ou l'économie environnementale. Les raisons de cet intérêt croissant pour les jeux différentiels paraissent être de deux ordres. D'abord, le développement des méthodes de programmation dynamique ou de contrôle optimal et leur caractère de plus en plus prégnant sur toute l'économie théorique ont joué un grand rôle ; il ne s'agit pas seulement d'une question relative à la maîtrise croissante par les économistes de ces techniques, il s'agit aussi bien plus profondément de la prise de conscience que l'étude des équilibres statiques est insuffisante et qu'il faut recourir à des équilibres dynamiques. Ensuite, et cette raison est bien sûr la plus forte s'agissant de jeux, il y a un focus croissant sur les situations de conflit ou de coopération entre les acteurs. A cet égard, il est frappant que Long consacre l'essentiel de son livre aux jeux non coopératifs. C'est sans doute parce que les stratégies non coopératives paraissent plus fréquentes... Modéliser des comportements stratégiques antagonistes est en tous les cas un des apports essentiels des jeux différentiels. C'est certes s'éloigner d'une conception normative visant à rechercher l'optimum social et les moyens de l'atteindre (même si cet optimum peut toujours être défini à titre de référence théorique), mais c'est aussi se rapprocher de situations bien réelles et qui ne sont pas proches de disparaître malgré l'activité des régulateurs (quand ils existent). Par exemple, les interactions stratégiques de firmes oligopolistiques rivales, qui peuvent aboutir à de la suraccumulation du capital, à des phénomènes de préemption ou de dissuasion à l'entrée sur le marché. Ou le jeu non coopératif de nations rivales dans l'exploitation de ressources renouvelables comme les stocks de poisson. Ou encore le jeu non coopératif de deux nations confrontées à une pollution transfrontière.

Avant de décrire l'apport des jeux différentiels dans le domaine qui nous intéresse (un sous ensemble de l'économie environnementale), il convient d'en rappeler rapidement quelques caractéristiques, sans rentrer dans le détail des considérations techniques.

Dans les jeux non coopératifs il est naturel de rechercher comme solution une suite d'équilibres de Nash dans lequel chaque joueur choisit à chaque instant sa stratégie optimale en considérant que la stratégie des autres joueurs est fixée pour cet instant donné[4].

Les joueurs peuvent jouer simultanément ou au contraire certains joueurs ont la priorité sur les autres.

Concernant les jeux simultanés, ce qui fait la différence entre les types de jeu, c'est d'abord l'information sur laquelle les joueurs fondent leur stratégie[5].

Un premier cas est celui dans lequel les joueurs fondent leur décision sur toute l'histoire des actions précédentes. Les stratégies sont alors non Markoviennes. Ce sont en général des stratégies dans lesquelles les joueurs acceptent de suivre une trajectoire cible et soutiennent leur accord sur cette trajectoire par la menace de punitions vis - à - vis d'éventuels déviants (de là vient la dénomination de "trigger

---

[4] Un équilibre de Nash se caractérise par le fait qu'aucun joueur n'a intérêt à une déviation individuelle par rapport à cet équilibre.

[5] On laisse de côté ici les jeux à information incomplète dans lesquels des joueurs détiennent des informations privées.
On laisse aussi de côté les jeux stochastiques.

strategies": les joueurs ont littéralement le doigt sur la gachette pour punir un déviant). En général ces stratégies se prêtent plutôt à des jeux en temps discret et leur utilisation sous forme de jeux différentiels nécessite des adaptations: par exemple on suppose qu'il y a un retard discret δ entre la défection d'un joueur déviant et le début de la punition par les autres joueurs. Ce type de jeu ne sera pas envisagé par le suite.

Un deuxième cas, à l'autre extrême, est celui dans lequel les joueurs choisissent leur stratégie sur la base du temps uniquement ; on parle de jeux Open Loop (ou boucle ouverte). C'est un cas qui reflète un comportement stratégique assez pauvre, mais il est adapté aux situations dans lesquelles l'information des joueurs sur les autres joueurs est très faible, situations finalement fréquentes. Il se prête bien aussi aux situations d'engagement ferme des joueurs à l'origine des temps, qui peuvent effectivement se produire. Le résultat d'un jeu Open Loop n'est en général pas résistant à des déviations par rapport à la solution optimale: on dit que les stratégies Open Loop ne sont pas parfaites en sous jeu. Toutefois, la solution Open Loop n'est pas sujette à l'incohérence temporelle s'agissant de jeux simultanés, en ce sens que si le jeu redémarre à un instant postérieur à l'instant initial à un endroit de la trajectoire optimale (sans déviation par rapport à celle -ci) la trajectoire optimale ultérieure n'est pas modifiée. Aucun acteur, à tout instant, n'a intérêt à dévier de la trajectoire optimale. La solution Open Loop a un autre avantage: il est dans la plupart des cas plus facile de trouver une solution analytique dans ce cas que dans un jeu Markovien. Finalement la solution Open Loop peut être considérée comme une approximation utile, parce que souvent plus accessible.

Le dernier cas est celui des stratégies Markoviennes: les joueurs fondent leur stratégie à un instant donné sur le temps et sur la valeur du vecteur d'état (ou de la variable d'état s'il n'y en a qu'une) ; l'hypothèse sous - jacente est que l'histoire du jeu dans les périodes antérieures est résumée entièrement par ce vecteur ou cette variable d'état. Le choix à tout instant de la valeur de sa variable de contrôle par un joueur dépend donc du vecteur d'état et du temps: en ce sens son choix dépend bien de l'histoire passée du jeu, y compris les actions des autres joueurs qui ont fait qu'on arrive à cette valeur du vecteur d'état ; ce joueur sait aussi que ses propres actions vont modifier le vecteur d'état et donc influer sur les choix des autres joueurs. Il est à noter que l'équilibre de Nash Markovien n'est pas sujet à l'incohérence temporelle ; il est très souvent mais pas toujours parfait en sous jeu (s'il l'est, on parle de MPNE: Markovian Perfect Nash Equilibrium)[6] ; Dockner *et al.* (2000) exhibent un théorème qui définit des conditions supplémentaires suffisantes pour qu'il en soit ainsi ; toutefois il existe une classe de jeu très utilisée pour laquelle l'équilibre de Nash d'un jeu Markovien est un MPNE sans condition supplémentaire: ce sont les jeux autonomes à horizon infini, dans lesquels le temps n'intervient pas explicitement dans les fonctions impliquées dans le problème d'optimisation.

Souvent (tout au moins quand c'est possible ou quand cela paraît opportun) deux versions d'un même jeu différentiel simultané sont étudiées, l'une en Open Loop et l'autre en stratégie Markovienne.

Concernant les jeux dans lesquels un des joueurs a la priorité sur les autres, le principal thème est celui des jeux de Stackelberg: jeux à deux joueurs, dans lesquels le leader joue en premier, le suiveur jouant après[7]. Ce pouvoir du leader lui donne un avantage sur l'autre joueur et lui permet d'augmenter ainsi en général son bien - être par rapport à une situation de jeu simultané. Cette situation a bien sûr été étudiée en premier en économie industrielle et plus précisément pour les oligopoles à la Cournot dans lesquels une firme dominante peut avoir priorité d'action par rapport à une firme dominée. Dans les jeux de Stackelberg dynamiques, comme dans les jeux simultanés, on distingue les stratégies Open Loop et les stratégies Markoviennes.

[6] Soit $\varphi(X,t)$ la solution de Nash du jeu commençant en $t = 0$ et $X = X_0$. Cette solution Markovienne est parfaite en sous jeu si pour le sous jeu commençant à toute période ultérieure t avec une valeur quelconque X_t, la solution optimale de ce sous jeu demeure $\varphi(X,t)$. Cette propriété est plus forte que la cohérence temporelle qui suppose seulement que pour le sous jeu commençant à toute période ultérieure t avec la valeur optimale en cet instant résultant du jeu initial $\varphi(X,t)$ demeure optimale.

[7] Il peut y avoir aussi un leader et plusieurs suiveurs, mais ce cas est moins fréquent que le cas à deux joueurs seulement.

S'agissant des stratégies Open Loop, on sait depuis longtemps (par exemple Kydland et Prescott (1977)) que les stratégies de ce type peuvent être très fréquemment sujettes à l'incohérence temporelle: alors que le suiveur croit pérenne la stratégie du leader définie au départ et choisit ses propres actions en fonction de cette stratégie, le leader peut avoir intérêt à dévier de celle-ci à des instants ultérieurs.

On est alors amené à se tourner vers des stratégies de Stackelberg Markoviennes. Elles sont de deux types.

Dans un premier type, nommé dans la littérature "hierarchical feedback Stackelberg leadership"[8], le leader est engagé depuis l'origine sur une stratégie Markovienne, qu'il annonce au suiveur. En fait, pour assurer qu'il n'y a pas d'incohérence temporelle, cette stratégie est une fonction affine de la variable d'état de type $a+bX$[9]. Après calcul de la fonction de réaction du suiveur à tout instant, il est possible dans certaines situations de déterminer des valeurs optimales de paramètres a et b qui sont constantes dans le temps. Cette approche, décrite par Dockner *et al.* dans l'ouvrage précité, résulte notamment de l'article fondateur de Benchekroun et Long (1998), relatif à la taxation optimale d'un monopole pollueur par un régulateur. Ce résultat est d'autant plus remarquable que la stratégie de leadership du régulateur conduit dans ce cas à une solution optimale parétienne. Il existe des applications de ce type de stratégies, y compris dans le domaine de l'économie des ressources naturelles comme on le verra ci - dessous, mais les situations dans lesquelles des solutions peuvent être trouvées sont peu nombreuses.

[8] On rencontre aussi le terme de "global" leadership pour ce type de stratégies.

[9] Il peut paraître curieux de lier le choix d'une fonction affine et la propriété de cohérence dans le temps. On comprend bien que l'existence de coefficients constants dans une fonction affine est nécessaire pour garantir la cohérence temporelle, mais le choix d'une fonction affine par les auteurs qui ont initié cette méthode semble plutôt le fruit de leur sagacité: sans doute ont - ils eu l'intuition que cette fonction simple était la plus à même de procurer le résultat recherché dans des jeux en général linéaires quadratiques. En revanche, rien ne prouve que la fonction affine est la seule à fournir le résultat recherché, et d'ailleurs Shimomura et Xie (2008) exhibent dans un cas particulier une fonction non affine qui procure au plan du bien-être une meilleure solution que la solution linéaire, ce qui laisse penser que pour les stratégies de "hierarchical Stackelberg" la solution linéaire n'est pas toujours la meilleure.

Dans un second type, dénommé "stagewise" Stackelberg, le leader à chaque instant fait le choix optimal connaissant la fonction de réaction à cet instant du suiveur ; compte tenu de ce choix pas à pas, il ne saurait y avoir d'incohérence temporelle. Ce type de stratégie est plus facile à manier car les situations dans lesquelles des solutions peuvent être trouvées sont plus nombreuses.

Il reste à mentionner au plan général les méthodes de résolution. Ce point est tout sauf mineur, compte tenu du petit nombre de cas pour lesquels des solutions analytiques ("closed - form") peuvent être trouvées, les autres cas relevant des méthodes numériques. S'agissant des stratégies Markoviennes, l'utilisation de l'équation de Hamilton - Jacobi - Bellman (HJB) est privilégiée. Si comme souvent le jeu est autonome et à horizon infini et s'il n'y a qu'une variable d'état[10], l'équation HJB est une équation différentielle ordinaire, dont on peut parfois (mais pas souvent!) trouver une solution analytique. On restreint alors les solutions aux solutions stationnaires. Le cas typique des jeux qui peuvent être résolus analytiquement est celui des jeux linéaires quadratiques caractérisés par des équations d'état linéaires et des fonctions objectifs quadratiques. La méthode de base est alors la méthode par identification.

Le principe du maximum pourrait être alternativement utilisé dans ces jeux Markoviens mais le problème est que, même s'il n'y a qu'une variable d'état, les équations relatives aux variations des valeurs adjointes sont difficiles à résoudre[11].

Pour les jeux Open Loop, au contraire, les équations relatives aux valeurs adjointes se simplifient et le contrôle principe du maximum est donc l'outil idoine.

[10] La plupart des jeux Markoviens sont de ce type car les chances de trouver une solution analytique sont plus grandes avec une seule variable d'état.

[11] Le fait qu'on puisse utiliser le principe du maximum pour les jeux Markoviens est souvent contesté. On notera néanmoins que Dockner *et al.* dans leur chapitre 4 donnent bien deux théorèmes fournissant des conditions suffisantes pour qu'une solution d'un jeu différentiel Markovien soit optimale: l'un s'appuyant sur l'équation HJB, l'autre sur le principe du maximum. Ce qui fait qu'on utilise rarement le principe du maximum pour des jeux Markoviens résulte d'une difficulté technique: l'équation différentielle adjointe relative au joueur i va dépendre des fonctions de contrôle des autres joueurs qui sont de la forme $\varphi_j\left(X\left(t\right),t\right)$ mais ces fonctions sont inconnues ; de là vient la difficulté de résoudre ces équations relatives aux valeurs adjointes, sauf cas particulier.

2 Les jeux relatifs aux ressources non renouvelables et à la pollution

Il existe plusieurs synthèses relatives à la littérature des jeux dans le domaine des ressources naturelles et de la pollution: par exemple celle de Jorgensen, Martin–Herran et Zaccour (2010) ou celle de Long dans une synthèse spécifique aux ressources naturelles ((2011)) ou dans son livre précité.

Le domaine des ressources renouvelables (poissons et autres espèces animales, forêts ou aquifères) est un thème souvent exploré du fait du risque de surexploitation d'une ressource à laquelle chacun peut accéder ("the Tragedy of the Commons"). Ce n'est pas celui qui nous concerne ici.

La littérature examinée ici est relative aux ressources non renouvelables et à l'économie de la pollution par le CO_2. Dans ces jeux le bloc des consommateurs met en place une taxe carbone pour remédier au dommage environnemental résultant de la consommation d'une ressource fossile non renouvelable mais cette mise en place a aussi des finalités stratégiques. Il y est supposé que ce bloc des consommateurs est sous la direction d'un régulateur unique.

Les producteurs sont aussi cartellisés et utilisent le levier prix ou le levier quantité pour maximiser leur bien-être. En fait, dans la quasi totalité des travaux, le comportement des producteurs est modélisé à travers une action par les prix et pas par les quantités, alors que dans la pratique le cartel de l'OPEP agit par les quantités (Wirl (2011) a récemment considéré que les quantités étaient un pauvre instrument dans ce type d'interaction, ce qui justifie a posteriori le choix des travaux théoriques: on y reviendra).

Il faut encore préciser que le domaine creusé ici est plutôt celui dans lequel deux parties, zone des producteurs et zone des consommateurs par exemple, disposent de pouvoirs de marché: on ne s'intéresse pas aux travaux qui présupposent qu'un seul des intervenants a un pouvoir de marché. Par exemple, le cas pour lequel la zone des producteurs a un pouvoir de marché et la zone des consommateurs n'en a pas:

voir Kemp et Long (1979).

Il y a donc pour ce qui suit dans cette revue de la littérature académique un monopole bilatéral dans le commerce de l'énergie.

Le premier cas de figure est celui pour lequel les deux joueurs jouent simultanément. Les travaux menés ont privilégié la recherche de solutions Markoviennes, au détriment des solutions Open loop jugées moins riches économiquement mais qui sont parfois étudiées à titre de comparaison.

Wirl semble être un des auteurs qui a contribué le plus à l'émergence de ces jeux Markoviens de monopole bilatéral dans le commerce international de l'énergie avec effet externe négatif dû à l'accumulation de gaz à effet de serre dans l'atmosphère et introduction par les consommateurs d'une taxe carbone à visée stratégique.

Dans un article de 1994 (Wirl (1994)), il développe un jeu bilatéral en supposant d'une part que l'externalité environnementale est à la fois en flux (proportionnelle à $x^2(t)$, si x est la consommation instantanée de la zone des consommateurs), et en stock (de type $d(Z - Z_0)^2$, d étant une constante) et d'autre part que le stock de CO_2 dans l'atmosphère ne connaît aucune absorption. Cette dernière hypothèse permet de n'avoir qu'un stock et donc qu'une variable d'état puisque, si Z est le stock de pollution et si X est le stock d'énergie fossile encore dans le sol, $\dot{Z} = -\dot{X}$ et par conséquent $Z = Z_0 + X - X_0$. Donc, on peut remplacer $d(Z - Z_0)^2$ par $d(X - X_0)^2$. La fonction de demande est linéaire parce que la fonction d'utilité est quadratique pour que l'on puisse trouver une solution analytique. Les producteurs ne consomment pas d'énergie, et les consommateurs établissent une taxe de taux θ par unité de consommation d'énergie.

Ces hypothèses seront reprises dans beaucoup des travaux ultérieurs, sauf l'externalité en flux rarement employée et également l'hypothèse simplificatrice que les coûts d'extraction sont nuls. Dans cet article il est supposé aussi que la contrainte de rareté de la ressource énergétique n'est jamais saturée et que la limitation globale de la consommation ne résulte donc que de considérations environnementales. Cette hypothèse sera elle aussi très souvent employée dans les travaux ultérieurs.

Après avoir décrit l'optimum de Pareto mondial, Wirl trouve une solution linéaire au jeu Markovien, qui se caractérise par un prix consommateur supérieur au prix résultant de la solution parétienne parce que le vendeur agit en monopole et a intérêt à restreindre la production dans la première partie de l'horizon temporel. Dans ce jeu aussi, selon l'expression de Hotelling, " the monopolist is the conservationist's best friend". L'état stationnaire final du MPNE est toutefois le même que celui de l'optimum parétien, bien qu'à tout instant avant l'infini le stock de pollution est toujours inférieur à celui de la solution parétienne. Il peut y avoir dans le MPNE un domaine de préemption forte, c'est - à - dire un domaine dans lequel le prix producteur dépasse le prix du monopole statique[12].

Wirl démontre l'existence d'un continuum d'autres solutions Markoviennes du jeu, non linéaires celles - ci, qui sont moins favorables que la solution linéaire du point de vue du bien - être des joueurs. Ce point est important puisqu'il implique qu'il convient de se limiter à la solution linéaire du jeu (si elle existe car on verra des cas dans lesquels elle n'existe pas). Long a fait remarquer en plus récemment qu'on peut s'interroger sur le statut des solutions non linéaires: si elles sont moins favorables que la solution linéaire au plan du "payoff" (à condition bien sûr que cette dernière existe), sans doute ne sont - elles pas parfaites en sous jeu en ce sens que si les joueurs se trouvent à l'état stationnaire des ces solutions ils voudraient sans doute s'en échapper pour accroître leur bien-être (Long (2011)).

Dans un article de 1995 (Wirl (1995)), Wirl fait l'hypothèse d'un stock de CO_2 dans l'atmosphère sujet à une obsolescence (de type δZ): ceci correspond à l'idée d'une absorption de ce gaz par les océans en particulier, qui est faible mais bien réelle. Toutefois Wirl constate qu'avec deux variables d'état et non plus une il n'y a plus de solution analytique et seulement des solutions numériques. Cette difficulté fait que cette hypothèse sera rarement reprise par la suite. Dans cet article, néanmoins,

[12] On parle de préemption forte quand le prix producteur dans le jeu est supérieur au prix du monopole statique et on parle préemption faible quand le prix producteur du jeu est supérieur au prix de la réponse de Nash du producteur face à la mise en place d'une taxe carbone statique. Ce prix de Nash statique est inférieur au prix de monopole statique, d'où le terme de préemption faible.

Wirl introduit aussi une hypothèse de coût unitaire d'extraction croissant au fur et à mesure que le stock d'énergie fossile dans le sol diminue. Cette dernière idée sera souvent utilisée par la suite.

Dans un autre article de 1995 écrit avec Dockner (Wirl et Dockner (1995)), Wirl va plus loin en supposant que l'Etat ne se comporte pas seulement en régulateur bienveillant qui a pour but seulement la maximisation du surplus des consommateurs (il est supposé qu'il n'y a pas de producteurs dans la zone des consommateurs) mais qu'il est aussi motivé par les revenus fiscaux en eux - mêmes (c'est un état "Leviathan"). Le payoff de cet Etat est une somme pondérée de ces deux objectifs. Alors, cet Etat peut réduire la rente des producteurs, au moins partiellement: au début de l'horizon de planification le prix producteur se trouve en effet réduit par rapport au cas dans lequel il n'y a pas ce motif d'amour des taxes pour elles - mêmes.

Tant que ce sont les considérations environnementales qui limitent la consommation totale d'énergie et que la contrainte de ressources finies dans le sol n'est pas saturée, il existe une solution linéaire mais aussi des solutions non linéaires mais celles - ci sont moins favorables au plan du bien - être.

Toutefois l'article exhibe un autre résultat: si la contrainte de la ressource rare "mord", alors il n'y a pas de solution linéaire mais seulement une solution non linéaire. Celle - ci est la seule solution en cas de saturation de la contrainte de rareté.

En 2004, Liski et Tahvonen publient un article important parce qu'il éclaire de façon bien plus nette que dans les articles antérieurs l'intérêt pour la zone de consommation d'une taxation stratégique de type taxe carbone: s'emparer d'une partie de la rente des producteurs d'énergie fossile (Liski et Tahvonen (2004)).

Ils retiennnent d'abord l'hypothèse d'un coût unitaire d'extraction croissant au fur et à mesure que le stock d'énergie fossile dans le sol diminue ; ils substituent ainsi une idée de rareté économique à l'idée de rareté absolue de la ressource fossile ; alors, même sans dommage environnnemental, la ressource ne sera jamais totalement employée pour des raisons économiques.

Si elle n'a pas de finalités stratégiques mais seulement des préoccupations environnementales liées à l'effet de serre, la zone des consommateurs doit mettre en place quand elle se trouve face au cartel des producteurs une taxe carbone égale à la valeur actualisée des flux marginaux futurs de dommage, ce qui correspond donc uniquement à des motifs Pigouviens. Toutefois, quand cette zone a aussi des finalités stratégiques (ainsi que les producteurs, chacun jouant alors une stratégie Markovienne), sa taxe carbone doit comporter un second élément qui est un élément de taxe ou de subvention à l'exportation. La taxe carbone optimale du MPNE s'écrit[13]:

$$\theta(t) = \int_0^{\infty} e^{-\rho(\tau - t)} \left[D'(Z(\tau)) - x(\tau)\, p'(X(\tau))\right] d\tau$$

Ainsi, si le prix producteur est une fonction décroissante du stock d'énergie fossile encore dans le sol, c'est - à dire une fonction croissante du temps puisque ce stock ne saurait que diminuer avec le temps, alors la taxe carbone stratégique comporte forcément un élément de taxe à l'importation au - delà du motif Pigouvien. Si ce prix producteur est décroissant avec le temps, il y aura au contraire un élément de subvention à l'importation dans la taxe carbone stratégique.

Pour aller plus loin que ce premier résultat, les auteurs font ensuite l'hypothèse classique de fonctions d'utilité et de dommage quadratiques, ce qui leur permet de résoudre analytiquement le jeu et surtout de trouver une relation plus précise entre le dommage environnemental et l'élément de commerce extérieur de la taxe carbone optimale du MPNE. En fait, si le dommage est petit ou intermédiaire, la taxe carbone contient un élément de taxe à l'importation ; si le dommage est élevé, elle contient un élément de subvention à l'importation.

Regardons par exemple ce qui se passe quand le dommage est fort: la zone de production a intérêt à retarder la consommation de la ressource par un prix producteur élevé au départ car elle sait que ce prix va baisser avec le temps (le dommage environnemental va croître fortement avec la diminution du stock en

[13] $D(Z)$ est la fonction de dommage environnemental, pas forcément quadratique à ce stade, x est la consommation instantanée d'énergie et $p(X)$ est le prix producteur qui est une fonction du stock d'énergie fossile puisque le producteur a une stratégie Markovienne.

terre et donc la demande va s'écrouler) ; pour contrer cette attitude la zone de consommation va mettre en place un élément de subvention à l'importation.

Ou ce qui se passe quand le dommage est faible: la zone des consommateurs a intérêt à retarder la consommation car elle sait que le prix producteur va augmenter avec le temps (l'effet environnemental qui bride la demande de plus en plus avec le temps est moins fort alors et l'augmentation des coûts unitaires d'extraction va au contraire jouer de plus en plus avec le temps) ; elle va donc mettre en place un élément de taxe à l'importation dans la taxe carbone pour freiner la consommation.

Le résultat majeur de ce papier est à mon sens de comparer les payoffs des joueurs dans trois situations: équilibre efficace, MPNE et cartel des producteurs face à une zone de consommation passive. Et surtout de montrer que le payoff des consommateurs dans le MPNE est supérieur à leur payoff quand ils demeurent passifs face au cartel, c'est - à - dire n'établissent pas de taxe carbone. Liski et Tahvonen font remarquer que cette dernière situation est bien la situation de référence pratique, car c'est celle qui se rapproche le plus du monde réel.

Par rapport à la situation de référence du cartel et des consommateurs passifs, les consommateurs gagnent toujours, quel que soit le dommage environnemental, à introduire la taxe stratégique optimale du MPNE, et les producteurs perdent toujours à jouer le jeu Markovien...Ce résultat n'est pas qu'un résultat traditionnel de commerce extérieur puisque le dommage environnemental intervient. La possibilité apparaît bien que "le problème de la pollution accompagné par la coordination de la taxation peut amener des bénéfices aux dépens du cartel", comme les deux auteurs l'écrivent.

De ce point de vue, l'article de Chou et Long (2009) est apparemment proche du précédent mais c'est en fait un article relatif au commerce extérieur des ressources non renouvelables sans dommage environnemental. Le résultat principal est que les pays consommateurs ont intérêt à un jeu Markovien de monopole bilatéral avec les producteurs par rapport à la situation de référence du " free trade" avec des producteurs concurrentiels et des consommateurs passifs, tout au moins si le coût d'extraction unitaire dépasse un niveau seuil (ce niveau seuil étant d'autant plus grand que le taux d'escompte est plus élevé). Ce résultat est un pur résultat de commerce extérieur, donc aux marges de notre champ d'intérêt ici.

Concernant les jeux de Stackelberg, force est de constater que les articles mettant en avant des solutions de type "hierarchical" sont des articles relatifs au commerce extérieur des ressources non renouvelables mais sans dommage environnemental[14]. On ne fera donc que mentionner deux articles, au demeurant fort éclairants, de Fujiwara et Long dans ce domaine. Dans un article de 2010 (Fujirawa et Long (2010)), les deux auteurs étudient un cas de jeu bilatéral fondé sur les stratégies classiques de prix du côté des producteurs et de taxe du côté des consommateurs, mais dans un cadre de "hierarchical leadership". Les résultats principaux sont que, si les pays producteurs s'érigent en "hierarchical" leader, l'équilibre obtenu sera différent de l'équilibre du MPNE (alors qu'on verra que dans un leadership à la "stagewise" les deux équilibres sont identiques) et que, si les consommateurs sont au contraire le leader "hierarchical", l'équilibre sera bien sûr différent du MPNE et surtout non seulement le bien - être des consommateurs sera supérieur dans cet équilibre à leur bien - être dans un MPNE mais il sera aussi supérieur à leur bien - être dans un leadership à la "stagewise" ; selon ce papier, l'engagement dès le départ sur une stratégie de type "hierarchical" serait donc très bénéfique aux consommateurs (au prix toutefois d'une baisse du bien - être mondial par rapport aux deux autres solutions).

Dans un autre article (Fujirawa et Long (2009)), ils supposent que les producteurs jouent en quantité et non plus en prix, une première zone de consommation jouant par le truchement de taxes comme habituellement et une seconde zone de consommation existant aussi mais étant passive (appelée reste du monde). Ils montrent que, si le leader "hierarchical" est la zone des pays consommateurs actifs, alors le bien - être mondial est supérieur à ce qu'il serait en cas de leadership

[14] Dans les jeux de Stackelberg "hierarchical", les cas de figure solvables sont déjà rares. Trouver des solutions si l'on introduit en plus une fonction de dommage environnemental semble encore plus difficile.

”hierarchical” des producteurs: et les auteurs d’ajouter que le leadership des gros acheteurs comme les Etats - Unis, la Chine et le Japon entraînerait une amélioration du bien - être mondial, sous - entendu par rapport au monde dans lequel l’OPEP dominerait. En outre, que le producteur ou l’acheteur actif soit leader du jeu, le payoff de ces deux joueurs est supérieur à celui du MPNE, ce qui n’était pas le cas quand le producteur jouait en prix. Tout ceci vient de l’hypothèse du jeu en quantité des acheteurs. On notera que ce cas prix (acheteur) - quantité (vendeur) est justement celui que Wirl identifiera comme un des seuls cas donnant une solution intérieure (voir son article précité) quand au moins un des joueurs joue en quantité.

Concernant les jeux de ”stagewise” Stackelberg de monopole bilatéral relatif au commerce extérieur des ressources fossiles et intégrant en même temps la dimension environnementale de l’effet de serre, on peut évoquer d’abord le papier de Tahvonen de 1996 (Tahvonen (1996)). Dans une première partie, l’auteur suppose qu’il n’y a pas d’obsolescence du stock de pollution et que les coûts unitaires d’extraction sont proportionnels à la quantité extraite à l’instant considéré[15]. Après avoir exhibé la solution analytique de l’équilibre parétien mondial avec donc une taxe carbone purement Pigouvienne, il considère le cas dans lequels le vendeur a un leadership à la ”stagewise Stackelberg”, ce qui est la vraie nouveauté de l’article. Il dégage une solution analytique dans laquelle la taxe des consommateurs est inférieure à la taxe Pigouvienne et le prix producteur supérieur au prix producteur établi par un régulateur mondial parétien. Dans une seconde partie, il revient sur les hypothèses simplificatrices en matière de stock de pollution et de coûts d’extraction, pour conclure qu’il n’ y a que des solutions numériques.

Tahvonen ne s’en rend pas compte immédiatement, car ce point ne sera eclairci

[15] Cette hypothèse est différente de celle des coûts unitaires d’extraction constants ou de celle des coûts unitaires croissant avec la diminution du stock de ressource fossile encore dans le sol. Cette hypothèse de Tahvonen apparaît en fait assez peu plausible. L’hypothèse des coûts unitaires croissant avec la diminution du stock de ressource fossile encore dans le sol, considérée en premier par Wirl, semble bien plus proche de la réalité quand on s’intéresse à des équilibres de long terme. Rubio et Escriche (2001) font remarquer d’ailleurs que des coûts unitaires croissant avec les quantités extraites à un instant donné correspondent à des rendements décroissants d’une ressource différente de celle de la ressource naturelle et n’ont donc que peu d’intérêt dans une analyse de long terme centrée sur les ressources naturelles.

que quelques années plus tard par Rubio et Escriche (2001), cet équilibre de "stagewise Stackelberg" est en fait identique au MPNE dans lequel les deux joueurs jouent simultanément.

Dans leur article de 2001, ces deux auteurs s'en tiennent à une hypothèse de coûts unitaires d'extraction croissant avec la diminution du stock de ressource fossile dans le sol. Leur apport est de décrire le cas dans lequel les pays importateurs sont le leader du jeu de "stagewise" Stackelberg et les producteurs sont le suiveur et de comparer cette solution au MPNE[16]. Ils démontrent que ce leadership des importateurs leur permet d'accroître leur bien - être par rapport au MPNE, tandis que celui des producteurs dans cette solution de Stackelberg diminue par rapport au MPNE. Le leadership des consommateurs aboutit donc bien, par rapport au MPNE, à un transfert de rente à leur profit et au détriment des producteurs.

L'article de Wirl de 2011 déjà cité met le focus sur le choix quantité versus prix pour les joueurs.

Il apparaît que, si les producteurs choisissent de jouer par les quantités, les quotas en fait, alors il n'y a qu'un cas de solution intérieure: celui dans lequel les consommateurs jouent en prix (= en taxes) et ont un leadership à la Stackelberg[17]. Ce serait là une bien pauvre solution pour les producteurs qui auraient en quelque sorte à subir le leadership des consommateurs en acceptant un prix producteur plus bas que dans le MPNE, lequel prix d'ailleurs exclurait toute forme de préemption. Wirl en déduit que l'OPEP devrait plutôt abandonner la stratégie des quotas et revenir à la stratégie des prix qu'il avait utilisée jusqu'au milieu des années 80. Mais il y a une autre conséquence: dans ce cadre théorique, des stratégies purement quantitatives des deux joueurs - permis pour la zone de consommation, quotas pour la zone de production- seraient suicidaires parce que le seul équilibre serait celui

---

[16] Ils font toutefois une erreur en affirmant que la taxe carbone du MPNE est Pigouvienne. Cette erreur sera corrigée dans le papier de Liski et Tahvonen (2004). Long fait nettement remarquer cette erreur dans sa synthèse précitée.

[17] Cet équilibre est d'ailleurs identique à celui d'un "stagewise" Stackelberg dans lesquels les consommateurs sont leader et les deux joueurs jouent en prix (c'est - à - dire en taxe pour les consommateurs et en prix producteurs pour les producteurs).

d'une consommation nulle, toute solution intérieure étant alors inenvisageable.

Si les producteurs jouent en prix, les stratégies de la zone de consommation peut être en taxes ou en quantité: cela ne changera rien pour la zone de consommation. Mais si jamais les producteurs jouent en quantité, il faut absolument que la zone de consommation joue en taxes et pas en permis et qu'elle prenne le leadership. Jouer par les taxes et prendre l'initiative en premier est la stratégie qui prémunit au mieux ses intérêts, que les producteurs jouent en prix ou en quantité.

Wirl conclut en affirmant que le jeu par les quantités serait un mauvais choix pour les deux parties et que les prix et les taxes sont les choix naturels dans ces configurations de jeu.

Pour clore cette revue de la littérature on mentionnera une annexe au présent chapitre, qui est une typologie permettant de classer les différentes jeux rencontrés et de comprendre les conséquences des différentes hypothèses envisageables. On pourra se référer à cette annexe pour situer les hypothèses et les méthodes de résolution des trois jeux qui vont maintenant être présentés. On notera que les trois jeux ci -dessous ont les caractéristiques qui les apparentent à cette littérature:

- au plan analytique, ce sont des jeux différentiels continus, bilatéraux et non coopératifs, déterministes et en information complète, avec une seule variable d'état et un recours à des fonctions linéaires ou quadratiques pour trouver des solutions analytiques ;

- les méthodes de résolution sont aussi dans la lignée de celles de ces jeux: principe du maximum pour le stratégies Open Loop (troisième jeu notamment), principe du maximum ou équation de Hamilton - Jacobi - Bellman (HJB) pour les stratégies Markoviennes des jeux simultanés (premier et deuxième jeu) avec l'utilisation de la méthode d'identification pour les solutions linéaires (premier et deuxième jeu), intégration de la fonction de réaction du suiveur dans l'équation HJB du "leader" pour les stratégies de stagewise[18] Stackelberg

[18] Il n'y a pas de jeu de type hierarchical Stackelberg.

(deuxième jeu) ;

- au plan économique, ces jeux s'inscrivent dans la problématique de la mise en place d'une taxe carbone à visée non seulement Pigouvienne mais aussi stratégique, avec rareté physique et économique de la ressource fossile.

3 Premier thème de recherche: un jeu avec plafond de pollution

Avec L. Ragot et K. Schubert il a été étudié un jeu avec plafond de pollution et faible dommage (Dullieux *et al.* (2011)).

L'idée de base est de substituer à l'hypothèse classique du dommage environnemental quadratique utilisé par les auteurs précédents, qu'il s'agisse de Wirl ou de Liski et Tahvonen par exemple, l'hypothèse d'une limite supérieure de concentration de CO_2 dans l'atmosphère: dépasser cette limite amènerait des conséquences catastrophiques. Cette limite supérieure est fondée sur des évidences scientifiques. Le GIEC avait établi cette limite à 450 ppm en 2007 avec l'idée sous - jacente que le respect de cette limite permettrait de ne pas dépasser un réchauffement de 2Â°C par rapport à la température terrestre pré - industrielle.

Si l'on suppose qu'il n'y a pas d'obsolescence du stock de CO_2 dans l'atmosphère, alors ce plafond est équivalent à un budget carbone global. Techniquement l'absence d'obsolescence permet de travailler avec une seule variable d'état.

Dans la littérature théorique l'idée d'un plafond de pollution a été pour la première fois introduite par Chakravorty, Magné et Moreaux (2006b) mais dans une optique de recherche d'une taxe carbone optimale au sens parétien du terme. Il s'agit ici d'utiliser cette idée dans le cadre d'un jeu dynamique entre une zone de consommation cartellisée et une zone de producteurs elle aussi cartellisée.

On écrira donc:

$$X_0 - X_t \leq \bar{Z}$$

X étant le stock encore dans le sol et $\bar{Z}$ le plafond de pollution (Z_0 est supposé nul).

Cette hypothèse radicale d'un plafond correspond à une réalité institutionnelle et cela lui donne de la force puisque finalement c'est ce que l'on a trouvé de plus expédient pour mobiliser au niveau mondial les efforts des divers pays dans la lutte contre le réchauffement climatique, bien que malheureusement ce plafond de pollution ne soit nullement contraignant à ce stade. Toutefois, au plan théorique, elle peut être critiquée en ce sens qu'elle ignore le fait qu'avant le plafond il y a bien des dommages. C'est pourquoi il a été finalement supposé qu'en plus du plafond il y aurait dans le modèle un dommage faible à tout instant avant que le plafond ne soit atteint. La faiblesse de ce dommage avant plafond est cohérente avec l'hypothèse du plafond. Techniquement ce dommage est linéaire au lieu d'être quadratique.

Pour le reste, les hypothèses sont pour l'essentiel identiques à celles de Liski et Tahvonen (2004) et en particulier celle relative aux coûts unitaires d'extraction: une fonction affine du stock de ressource dans le sol et décroissante avec celui - ci[19]. Un des objectifs principaux du papier est d'ailleurs de revisiter les conclusions de ces deux auteurs dans leur article de 2004 déjà cité, qui me paraît être une des meilleures synthèses dans le domaine considéré et qui est le plus éclairant à mon sens parce qu'il traite explicitement de la situation de référence pratique dans laquelle les consommateurs sont passifs et n'introduisent pas de taxe carbone et les producteurs sont cartellisés.

Le corps de l'article est consacré à la recherche d'une solution au MPNE: les deux joueurs jouent simultanément et le jeu est joué avec des stratégies Markoviennes de "feedback". Le contrôle optimal sera utilisé parce que dans ce particulier la solution peut être définie à travers cette outil, mais le même résultat est obtenu en annexe en utilisant comme il se doit l'équation HJB. Le contrôle optimal permet au cas

[19] En plus, comme chez ces auteurs, il est supposé que l'extraction initiale est toujours profitable et que même sans contrainte environnementale les producteurs laisseront toujours une partie du stock de ressources dans le sol. Par ailleurs, la fonction d'utilité des consommateurs est linéaire pour espérer trouver une solution analytique. Enfin, les producteurs ne consomment pas d'énergie pour simplifier le modèle.

particulier de traiter facilement les problèmes de continuité ou de non continuité des variables à la jointure, mais HJB reste nécessaire pour calculer facilement les payoffs.

Le programme du régulateur de la zone de consommation montre que la taxe carbone du MPNE est différente de celle de Liski et Tahvonen (2004) en ce sens qu'elle comporte avant le plafond trois éléments au lieu de deux:

$$\theta(t) = \left(e^{-\rho T_m}\theta_{T_m-}\right)e^{\rho t} + d\left(1 - e^{-\rho(T_m - t)}\right) - \int_t^{T_m} e^{-\rho(\tau - t)} p'(X_\tau)x_\tau d\tau.$$

T_m est l'instant de jointure avec le plafond. Le premier terme est lié spécifiquement à l'existence du plafond: c'est une forme de taxe " Hotellinienne" qui croît avec le temps ; le deuxième est le terme Pigouvien déjà rencontré - somme actualisée des dommages futurs - mais avec une valeur tenant compte de l'existence du plafond et du fait que le dommage est linéaire et non pas quadratique ; le troisième terme est la partie stratégique de la taxe carbone. Comme chez ces auteurs, l'élément stratégique de la taxe carbone est un tarif à l'importation si le prix producteur est croissant avec le temps, ce qui s'avèrera être toujours le cas dans notre MPNE avec plafond de pollution. Ceci impliquera notamment que la taxe carbone sera toujours positive et en plus toujours supérieure à la somme des motifs environnementaux, qu'ils soient Pigouviens ou Hotelliniens.

Le programme du régulateur des producteurs couplé à l'équation de la demande d'énergie de la part des consommateurs fait bien apparaître les différents effets de la taxe carbone sur le prix producteur. En effet[20]:

$$p = \frac{1}{2}\left[c(X) + a - \theta(X) + \lambda_p\right]$$

Il y a donc deux effets de la taxe carbone sur le prix producteur. Le premier est l'effet immédiat à travers le prix de monopole, qui est négatif quand la taxe carbone augmente: le cartel réduit le prix producteur pour soutenir la demande.

[20] $c(X)$ est le coût d'extraction unitaire, a le "choke price" pour lequel la demande est complètement étouffée, $\theta(X)$ la taxe carbone et λ_p la rente de rareté du producteur.

Le second effet est dynamique à travers la rente de rareté ; quand la taxe carbone augmente avec le temps, cet effet dynamique à travers la rente de rareté est positif: quand le cartel extrait une unité d'énergie supplémentaire, il sait qu'alors la zone des consommateurs va augmenter la taxe carbone, ce qui va affecter ses profits futurs, et en réaction ce cartel augmente le prix producteur. Quand la taxe carbone décroît avec le temps le premier effet est positif et le second est négatif. Que la taxe carbone soit croissante ou décroissante avec le temps, les deux effets sont de sens contraire par conséquent. La question est donc de savoir si le cumul des deux effets est positif ou négatif. En fait, la résolution du jeu montre que l'effet total est positif si le dommage est nul (ou très faible par continuité). Dans ce cas il y a bien préemption forte de la taxe carbone par les producteurs[21].

Dans la résolution du jeu il y a deux cas de figure. Le premier cas est celui dans lequel la contrainte de plafond n'est jamais saturée car le plafond est assez "haut". Alors, pour des raisons purement économiques, l'extraction s'arrête avant que le plafond ne soit atteint. Ce cas a comme meilleure solution une solution purement linéaire[22].

Dans l'article on se concentre sur le second cas de figure et on fait donc l'hypothèse que le plafond est suffisamment bas pour que la contrainte environnementale "morde". Par conséquent la solution est non linéaire, comme Wirl l'a montré. Dans ce cas de figure, l'extraction s'arrête avant que l'on atteigne la limite due à la rareté économique et on laisse in fine plus de ressources dans le sol que si seule la contrainte économique avait joué.

On peut alors trouver la solution du jeu avec des régles implicites de feedback et des sentiers explicites fonctions du temps pour les différentes variables: prix producteur, taxe carbone, prix consommateur...Il apparaît que le prix producteur et le prix consommateur sont toujours croissants avec le temps. La taxe carbone peut

---

[21] Le prix producteur statique est:

$$p = \frac{1}{2}\left[c\left(X\right) + a\right]$$

$-\theta\left(X\right) + \lambda_p > 0$ implique donc qu'il y a préemption forte.

[22] Ce cas est résolu en détail dans l'annexe de l'article.

être décroissante au début de l'horizon mais elle sera toujours croissante quand on s'approche du plafond. Comme on l'a déjà vu, elle contient toujours un élément de tarif à l'importation et ce résultat est différent de celui de Liski et Tahvonen (2004). Dans leur modèle, ce tarif à l'importation n'est présent que si le dommage n'est pas trop sévère ; si le dommage est sévère, il y a au contraire dans leur modèle un élément de subvention dans la taxe carbone.

A la jointure la taxe carbone et le prix producteur ne sont pas continus et "sautent", alors que le prix consommateur est continu à la jointure. Le fait que les variables de contrôle "sautent" à la jointure est le résultat des comportements stratégiques des joueurs dans la solution Markovienne (et d'ailleurs dans les autres solutions examinées ci - dessous à titre de comparaison, il y a au contraire continuité de ces variables à la jointure). Pour le prix producteur, par exemple, l'explication économique est la suivante: considérons le cas du dommage très faible avant le plafond, alors il y a préemption forte par le producteur avant le plafond et le saut du prix producteur à la jointure est la conséquence directe de cette préemption.

La solution Markovienne est ensuite comparée à l'équilibre efficace au sens parétien et à la solution Open Loop. Ces deux autres cas ne font pas apparaitre de discontinuité de variables à la jointure. Celles - ci sont donc spécifiques aux comportements stratégiques du MPNE, comme cela a déjà été signalé. Un résultat notable est que l'instant de jointure du MPNE est plus tardif que celui de l'Open Loop (OL), qui est lui - même plus tardif que celui de l'équilibre efficace. Le MPNE est aussi plus conservateur que l'OL en ce sens que l'extraction initiale est plus faible dans le MPNE que dans l'OL. Ces deux équilibres sont de toutes façons beaucoup plus conservateurs que l'équilibre efficace au sens qui vient d'être indiqué.

Le résultat principal du papier est relatif à la comparaison du MPNE et du cartel face à des consommateurs passifs n'établissant pas de taxe carbone. Dans ce cas, chacun est conscient de l'existence du plafond mais agit comme s'il l'ignorait. Les producteurs, par exemple, se comportent comme s'il n'y avait pas de contrainte les empêchant d'extraire tout ce qui est économiquement profitable. Cette situation, désastreuse pour l'environnement, n'est pas loin néanmoins de la réalité et est donc un "benchmark" du plus grand intérêt.

Au plan technique le prix producteur, qui est alors aussi le prix consommateur, est une fonction croissante et concave du temps. Juste avant le plafond, ce prix est inférieur au "choke price" et il "saute" à ce niveau à la jointure.

Toutefois le point important est le suivant:

- quand le plafond n'est pas trop "serré et que le dommage marginal d'origine environnementale est suffisamment petit, alors la zone des consommateurs gagne en bien - être dans le MPNE par rapport à la situation de passivité (= pas de taxe carbone face au cartel des producteurs qui ignore lui aussi la contrainte environnementale) ; c'est en ce sens là que l'on peut affirmer qu'alors la taxe carbone est pour les consommateurs un moyen de capter une partie de la rente pétrolière ; dans le MPNE, alors, les consommateurs ne souffrent pas d'une réduction trop drastique de leur consommation tandis qu'ils bénéficient de la réduction du dommage environnemental liée à l'introduction de la taxe carbone ;

- quand le dommage environnemental est également suffisamment petit mais que le plafond est très "serré", alors les consommateurs perdent en bien - être dans le MPNE par rapport à la situation de passivité ; ce dernier cas ne se produisait absolument pas dans le modèle à la Liski et Tahvonen ; la conjecture de ces deux auteurs que les consommateurs gagnent toujours dans le MPNE n'est donc pas confirmée dans un modèle qui est pourtant proche.

4 Deuxième thème: transfert contre taxe carbone

L'idée de départ est le fait qu'une taxe carbone, pour être efficace, devrait etre mondiale. Toutefois, de nombreux pays pauvres sont dans l'incapacité d'introduire sans soutien une telle taxe. Quant aux pays émergents, ils sont plus que réservés à une telle idée, ou ils réclament aux vieux pays industriels une aide pour la mettre en oeuvre pour des raisons évoquées ci - dessus.

Aussi est apparue la proposition chez les experts environnementaux et dans les réunions internationales d'un transfert des vieux pays riches vers les pays pauvres et émergents, destiné à financer l'introduction d'une taxe carbone dans ces derniers pays.

Le deuxième thème de recherche est une tentative pour étudier cette idée dans un cadre de jeu dynamique. Plus précisément, on considère un modèle à trois zones: une zone de consommation cartellisée dite B, par référence à l'annexe de Copenhague, qui représente la zone des vieux pays riches ; elle joue un jeu stratégique Markovien contre les pays producteurs, qui sont eux aussi cartellisés et constituent la seconde zone ; il y a enfin une troisième zone, dite A, qui représente les pays pauvres ou émergents et qui accepte de mettre en oeuvre la taxe résultant du jeu entre les deux autres zones, moyennant un transfert venant de la zone B. Le transfert de B vers A joue bien entendu un rôle dans la définition de l'équilibre du jeu entre les zones B et de production. On suppose que la zone B, en effet, transfère une fraction α du produit de la taxe carbone dans sa zone.

Le taux de transfert α est exogène et on n'envisage pas ici la possibilité d'un jeu coopératif sous jacent entre les pays consommateurs, qui pourrait aboutir à la formation des coalitions existantes avec à l'appui de celles - ci des mécanismes de transfert optimal. On ne se situe pas par conséquent dans le cadre de la littérature relative aux jeux coopératifs dans le domaine des négociations internationales sur le climat, avec par exemple l'article de Chander et Tulkens (1997).

Il y a n pays dans la zone B et $1-n$ dans la zone A[23], avec pour valeurs typiques dans les simulations $n = 0.4$ ou $n = 0.7$. Si x est la consommation instantanée d'énergie d'un pays - elle est la même pour chaque pays car la fonction de demande est supposée être partout la même et, par ailleurs, la taxe carbone θ est la même

[23] Les résultats seraient les mêmes si l'on supposait que le nombre de pays était N, que les pays de la zone B étaient au nombre de nN et ceux de la zone A au nombre de $(1-n)\,N$.

dans le monde entier - , alors le transfert de la zone B vers la zone A est $\alpha n\theta x$[24] et chaque pays de la zone A reçoit $\frac{n}{1-n}\alpha\theta x$. Ce transfert de B vers A exerce une pression négative sur le surplus de la zone B des pays riches, mais la mise en place de la taxe carbone diminue le dommage environnemental d'un autre côté et a donc un effet positif sur ce surplus.

On notera que ce modèle à trois zones est différent de celui proposé récemment par Karp, Sidiqui et Strand (2011). Ceux - ci supposent qu'il n'y a pas de taxe carbone dans la troisième zone et donc qu'il n'y a pas de taxe carbone mondiale. Le but de ces auteurs est d'ailleurs de montrer qu'une telle configuration peut entraîner une perte de bien - être pour la troisième zone. Un but par conséquent très différent de celui du présent papier qui est de montrer que la troisième zone peut bénéficier de l'instauration d'une taxe carbone mondiale dans certaines conditions.

Dans le MPNE (comme dans toute autre situation, par exemple l'équilibre de Stackelberg qui sera étudié ensuite) une fraction n du dommage environnemental est supporté par la zone B. En effet, le régulateur de cette zone a pour but la maximisation du bien - être de ses consommateurs sous contrainte d'environnement, bien qu'il cherche à obtenir la coopération de la zone A par l'accord "transfert contre taxe carbone" et bien qu'il manipule la demande d'énergie fossile de la zone A avec l'objectif d'accroître le bien - être des consommateurs de la zone B grâce à la réduction des dommages environnementaux.

La zone A, même si elle souffre du dommage environnemental, est supposée ne pas en tenir compte dans son calcul de bien - être: ceci paraît cohérent avec le fait qu'elle ne choisit pas le niveau de la taxe carbone. La taxe carbone dans cette zone est supposée intégralement remboursée aux consommateurs de façon forfaitaire.

La zone A n'est pas complètement passive: on suppose qu'elle ne concluera un accord avec la zone B de type "taxe carbone contre transfert" que pour un taux de transfert qui maximise son bien - être par rapport à tous les autres taux de transfert et qui améliore aussi son bien - être par rapport à la situation de référence. Cette

[24] Le reste de la taxe carbone de cette zone est redistribué de façon forfaitaire aux consommateurs, soit $(1-n)\,\alpha\theta x$

situation de référence est celle qui ne comporte ni transfert, ni taxe carbone que ce soit dans la zone B ou dans la zone A. C'est donc la situation de consommateurs mondiaux passifs face au cartel, que Liski et Tahvonen ont à juste titre mise en avant[25].

On insistera aussi sur le fait que la zone A ne joue pas dans le jeu et qu'en conséquence on peut supposer qu'elle n'a aucune action lui permettant de profiter d'un comportement d'incohérence temporelle. A ce titre, si elle donne son accord au contrat " transfert contre taxe carbone" elle ne saurait revenir sur celui - ci.

Les hypothèses relatives aux fonctions de coûts, à la fonction de demande ($u'(x) = a - bx$), à la fonction de dommage (quadratique, de type $d\left(X - X_0\right)^2$) et au fait que la zone de production ne consomme pas d'énergie sont celles de ces auteurs. On a choisi leurs paramètres numériques également[26], pour faciliter les comparaisons, les seuls paramères différents étant α et n.

En premier lieu on étudie le MPNE ; une solution analytique est trouvée par le truchement de la méthode d'identification (en suivant une variante proposée par Wirl dans ses articles précités). La mise en évidence de certaines évolutions, comme celle du bien - être par exemple en fonction du taux de transfert, nécessite toutefois le recours à la simulation. On cherche à vérifier qu'il existe un taux de transfert optimal au sens évoqué ci - dessus.

Le programme du régulateur des consommateurs fait bien apparaître la dynamique de la taxe carbone dans le MPNE:

$$\theta = \frac{1}{n\left(1-\alpha\right)}\left(V_B^{T\prime}(X) - n\alpha bx\right)$$

$V_B^{T\prime}(X)$ est le coût marginal du stock de pollution pour la zone B. A priori l'effet du taux de transfert sur la taxe carbone optimale est ambigu: d'un côté tout se

[25] Il pourrait être envisagé que la situation de référence soit celle dans laquelle les pays consommateurs établissent un taxe à l'importation sans motif environnemental. Cette référence sera exclue ici car pour les pays émergents et pauvres elle ne me paraît en rien pertinente, ces pays ayant plutôt tendance à subventionner la consommation d'énergie ou à la taxer de façon limitée à la fois pour des raisons sociales et pour des raisons économiques.

[26] Soit: a, b, c_1 et c_2 pour la fonction de coût $c(X) = c_1 - c_2X$, d.

passe pour la zone B comme si le dommage était multiplié par $\frac{1}{1-\alpha}$, ce qui pousse la taxe à la hausse ; d'un autre côté il y a un effet négatif du taux de transfert sur la taxe à travers le terme $-n\alpha bx$. La raison de ce dernier terme est que le transfert exerce une influence négative sur le bien - être de la zone B qui doit être quelque peu compensée par une moindre taxe carbone. En fait on peut montrer que ce second effet est le plus fort sur la taxe initiale en ce sens qu'une augmentation du taux de transfert pousse cette taxe initiale vers le bas.

Il apparaît en plus l'éventualité que la taxe carbone soit négative: il faudra éliminer ce cas de figure qui se produira quand le taux de transfert est trop élevé.

La résolution du MPNE permet de préciser les choses et d'obtenir quatre résultats principaux:

- d'abord, il n'y a pas de solution économique pour le jeu simultané Markovien si le taux de transfert est supérieur ou égal à $\frac{1}{2}$; en effet le payoff de la zone B devient négatif au - delà de cette valeur limite car le poids du transfert devient trop important ; on a:

$$V_B^T(X_0) = \frac{1}{\rho} nbx_0^2(\frac{1}{2} - \alpha)$$

- ensuite, il faut envisager de toutes façons un taux de transfert inférieur à $\frac{1}{2}$: en fait un taux de transfert inférieur à un taux $\breve{\alpha}$, qui dépend de la valeur des autres paramètres, pour que la taxe carbone soit toujours positive, ce qui est le seul cas économiquement intéressant ; alors, si le dommage est élevé, la taxe carbone est toujours croissante avec le temps et toujours positive ; si le dommage est faible, alors la taxe carbone est décroissante avec le temps pour de faibles taux de transfert et croissante pour des taux intermédiaires (mais toujours inférieurs à $\breve{\alpha}$), et elle est dans les deux cas toujours positive ; on a déjà signalé que la valeur initiale de la taxe carbone est toujours décroissante avec le taux de transfert: la logique sous jacente est que, plus le fardeau du transfert augmente, plus la capacité de la zone B à exercer une pression stratégique sur les producteurs à travers le mécanisme de la taxe carbone se trouve amoindrie ; le prix producteur initial est en revanche toujours croissant avec le taux de transfert ;

- si le dommage est "faible", la consommation initiale est croissante avec le taux de transfert: dans ce cas la baisse de la taxe carbone initiale avec le taux de transfert est plus forte que l'augmentation du prix producteur initial ; pour un dommage plus élevé, si le taux de transfert est loin de $\frac{1}{2}$, alors la consommation initiale est décroissante avec le taux de transfert: la tendance à baisser la taxe carbone pour contrer le fardeau croissant du transfert vers la zone A est quelque peu affaiblie par la nécessité d'avoir une taxe carbone initiale élevée pour lutter contre le réchauffement climatique et l'effet d'augmentation du prix producteur l'emporte donc sur l'effet de diminution de la taxe carbone avec pour conséquence une augmentation du prix consommateur initial et une réduction de la consommation initiale ;

- enfin, et ceci est le résultat essentiel, si le dommage est "faible" et si le nombre n de pays de la zone B est au moins égal à 0.7, alors il existe un taux de transfert [27]et donc un MPNE qui maximise le bien - être de la zone A relativement aux autres MPNE et par rapport à la situation de passivité considérée comme la référence pratique (consommateurs passifs face à des producteurs cartellisés) ; en outre, dans cet équilibre optimal, le bien - être de la zone B est supérieur à ce qu'il serait dans le cas de la situation de passivité.

Dans le jeu simultané Markovien il exite donc bien un taux de transfert optimal pour la zone A, qui lui permet de conclure un accord profitable avec la zone B et de contribuer en même temps à la lutte contre le réchauffement climatique. En outre, la zone B (dont le payoff est pourtant toujours décroissant avec le taux de transfert) a intérêt aussi à cet équilibre par rapport à la situation de passivité.

[27] Ce taux est bien sûr inférieur à $\breve{\alpha}$.

Toutefois, les conditions pour ce résultat sont assez restrictives, notamment quant au nombre de pays financeurs. En effet, même avec un dommage faible, si le nombre de pays qui financent est petit - typiquement 0.4 -, alors un taux assurant un maximum de payoff pour la zone A n'existe pas (le payoff de cette zone est alors toujours décroissant avec le taux de transfert[28]). La raison de l'échec de la solution MPNE si le nombre de pays financeurs est trop faible est la suivante: la consommation de la zone B est réduite par le fardeau croissant représenté par le transfert supporté par cette zone et cela réduit d'autant le payoff de la zone A ; comme le nombre de pays qui financent n'est pas assez élevé le transfert n'est pas assez important pour compenser cet effet négatif.

Le problème avec la jeu simultané est que l'on n'est pas sûr que l'on réunisse suffisamment de pays financeurs pour que la zone A ait intérêt à conclure un accord "taxe carbone contre transfert". De là l'idée de recourir à un jeu de Stackelberg dans lequel la zone B serait le leader et les producteurs le suiveur. La zone B, en prenant ce leadership face au producteur, pourrait améliorer sa consommation et celle de la zone A en faisant plus pression sur le prix producteur: ceci aurait un effet positif sur le payoff de la zone A. Il pourrait alors en résulter une augmentation du payoff de la zone A en fonction du taux de transfert même quand le nombre de pays financeurs est plus faible.

On utilise le concept de "stagewise" Stackelberg, pour éviter les problèmes d'incohérence temporelle, et on garde les autres hypothèses faites pour le MPNE.

Le programme du régulateur des consommateurs fait apparaître un élément supplémentaire par rapport au MPNE dans l'expression de la taxe carbone. En effet:

$$\theta = \frac{1}{n\left(1-\alpha\right)}\left(V_B^{S,}(X) - nxb\left(2\alpha-1\right)\right)$$

$V_B^{S,}(X)$ est le coût marginal du stock de pollution pour la zone B dans l'équilibre de Stackelberg, mais on voit surtout un terme positif nouveau $+nbx$ qui résulte de

[28] La situation "optimale" dans ce cas, à savoir $\alpha = 0$, n'a guère de sens économique: il est très peu probable que la zone A accepte de mettre en place une taxe carbone sans aucun transfert!

l'avantage stratégique de la zone B relativement à la zone des producteurs.

Les résultats relatifs à la taxe carbone et à la consommation initiale sont qualitativement très proches de ceux du MPNE. La vraie et importante différence avec le MPNE est que, même pour un nombre limité de pays financeurs (typiquement à partir de $n = 0.4$), il y a une valeur du taux de transfert qui maximise le payoff de la zone A par rapport aux autres MPNE mais aussi par rapport à la situation de passivité. Le contrat "taxe carbone contre transfert" paraît donc plus facile à réaliser dans le jeu à la Stackelberg que dans le jeu Markovien simultané, puisqu'il requiert un nombre minimum plus faible de pays financeurs.

Comme dans le MPNE, les pays de la zone B ont intérêt à jouer le jeu stratégique plutôt que de rester passifs face au cartel: ceci est un argument qui plaide pour le transfert et le "deal" qui va avec. Ce point n'est pas sans intérêt car on connaît les réserves qui existent dans les vieux pays riches pour un transfert de ce type.

Au total, il apparaît bien que, si les pays riches jouent un jeu stratégique Markovien avec les producteurs, les pays pauvres et émergents peuvent trouver un intérêt à conclure un deal avec eux "taxe carbone contre transfert", cet accord étant d'autant plus probable si les pays riches sont capables d'exercer un leadership à la Stackelberg face aux pays producteurs. En ce sens, ce papier est une contribution à la discussion pour l'introduction d'une taxe carbone mondiale, qui sera de toutes façons très difficile à réaliser compte tenu des multiples résistances qu'elle ne saurait manquer de rencontrer.

5 Troisième thème: rivalité entre deux zones de consommation

On reprend ici l'idée qu'il y a deux zones de consommation d'énergie fossile ayant des attitudes différentes pour des raisons évoquées plus haut (responsabilité historique des vieux pays riches dans l'accumulation des gaz à effet de serre dans l'atmosphère, volonté des pays émergents et des pays pauvres de ne pas freiner leur croissance par une politique climatique trop active), mais on met le focus sur la rivalité qui apparaît progressivement entre ces deux zones à propos de la politique climatique. Les dernières réunions mondiales sur ce sujet ont en effet montré des tensions croissantes entre ces deux blocs, bien qu'ils ne soient pas unifiés et que des attitudes asez variées au sein de ces blocs se manifestent. De façon schématique, les pays pauvres et émergents réclament des transferts massifs de la part des vieux pays riches comme condition préalable à la mise en place de politiques restrictives du type taxe carbone, tandis que les pays de l'OCDE, ou plutôt les pays européens et l'Australie (les Etats - Unis n'ont jamais adhéré aux accords de type Kyoto et la Russie vient de jeter l'éponge) sont les seuls à s'engager sur des objectifs chiffrés de reduction des émissions de CO_2 et à proposer des transferts massifs pour financer la politique climatique des pays pauvres et émergents. Toutefois, ces promesses de transfert restent jusqu'ici lettre morte, soit qu'elles ne soient que des paroles en l'air faute de ressources financières suffisantes du fait notamment de la crise économique, soit qu'un accord réel avec les pays émergents et pauvres soit pour l'instant hors de portée. Quant à ces derniers, leurs actions pour limiter le réchauffement climatique sont très limitées et on peut s'interroger sur leur volonté réelle de conclure des accords et d'agir.

Il est donc à craindre que la mise en place d'une politique unifiée au niveau mondial de lutte contre le changement climatique reste pour un bon moment du domaine du voeu pieu et qu'une politique de blocs soit peut - être ce que l'on peut voir de mieux ou de moins mauvais...

Néanmoins, des politiques régionales isolées ne peuvent être dans ce domaine qu'inefficaces. Ainsi en est - il des politiques mises en place par l'Union Européene comme l'EU - ETS. Puisque ces politiques s'appliquent à une zone qui représente moins de 20% des émissions mondiales de gaz à effet de serre, elles ne sont pas à la hauteur du problème mondial qui est posé et en plus elles créent un effet d'aubaine pour le reste du monde puisque les émissions mondiales sont un peu réduites et donc aussi le dommage qu'elles peuvent créer, sans que ce reste du monde n'ait rien à faire et sans qu'il soit par conséquent en quoi que ce soit incité à agir.

Comment donc prendre acte des faits rappelés ci-dessus ? Une politique mondiale et pas seulement régionale de lutte contre le rechauffement climatique est indispensable, mais on peut envisager l'hypothèse qu'elle doive tenir compte de l'existence de blocs régionaux de pays consommateurs (schématiquement, pour simplifier, deux blocs) ; dans ce cadre, une politique d'incitation en faveur des pays pauvres et émergents resterait nécessaire de la part des vieux pays riches mais elle ne nierait pas que les blocs sont rivaux et poursuivent chacun leur intérêt propre ; on aurait alors des formes de coopération entre les deux zones de consommation[29] mais aussi une attitude antagoniste entre elles. Ce cadre permettrait de progresser vers une politique qui pourrait être mondiale bien que sous optimale, mais en tous les cas bien meilleure que la passivité totale face au réchauffement climatique ou l'action isolée d'un seul bloc.

Le troisième thème de recherche est une tentative pour modéliser de façon simple ce cadre de coopération - antagonisme entre deux zones de consommateurs d'énergie fossile. Plus précisement, on postule comme dans l'article précédent qu'il y a deux zones de consommation, la zone A et la zone B. Toutefois, il n'y a pas de taxe carbone unique au plan mondial mais deux taxes carbone différentes. La zone B met en place une taxe carbone θ dans les pays qui la composent. Elle accepte de faire un transfert à la zone A contre la mise en place dans cette dernière d'une taxe carbone q qui devrait être différente de la taxe θ. En effet chaque zone, supposée dotée d'une régulateur régional, maximise son bien - être relativement à sa taxe carbone et choisit celle -ci en supposant que l'autre taxe est fixée. On aboutit donc dans le cadre de ce jeu non coopératif à un équilibre de Nash. La zone des producteurs est supposée être passive dans le jeu, alors que dans l'article précédent elle jouait contre une zone de consommation.

On étudie successivement un jeu statique simple et un jeu dynamique.

[29] Toutefois on n'envisage pas ici l'idée qu'il y a un jeu coopératif sous - jacent au sein des pays consommateurs permettant l'établissement des deux coalitions de pays consommateurs.

On reprend certaines hypothèses du jeu précédent: le rapport entre le nombre de pays qui composent chaque zone ($\frac{n}{1-n}$), les utilités quadratiques (par exemple $u\left(x_B\right) = ax_B$-$\frac{b}{2}x_B^2$), le dommage environnemental quadratique (pour le jeu statique il est de la forme dx^2 si x est la consommation totale d'énergie fossile, pour le jeu dynamique il est du type $d\left(X_t - X_0\right)^2$ si X_t est le stock d'énergie fossile encore dans le sol à la date t), la rareté physique de l'énergie fossile dont le stock est fini. En revanche plusieurs hypothèses sont différentes:

- d'abord, on fait l'hypothèse que les producteurs sont non seulement passifs dans le jeu mais aussi en concurrence entre eux et que leur coût de production unitaire est constant (c_1 inférieur au "choke price" a) ; on suppose également que dans le jeu dynamique le prix producteur n'intègre pas de rente de rareté et qu'il est donc constant et égal à c_1 ; dans les deux jeux le prix producteur est donc toujours égal à c_1 ; cette simplification se justifie par le fait que l'accent est mis ici sur la compétition entre deux zones de consommation et pas sur la relation avec les producteurs ;

- en outre, la zone A intègre dans les jeux statique et dynamique le dommage environnemental dans son calcul de bien - être, et ceci est cohérent avec le fait qu'elle détermine dans ces jeux sa propre taxe carbone [30] ;

- ensuite, les joueurs joueront dans le jeu dynamique des stratégies "Open Loop" et non pas Markoviennes ; cette hypothèse a clairement pour finalité de permettre de trouver une solution analytique ;

- enfin, le transfert sera supposé être de la forme: $S = \frac{(1-n)Nq\theta}{2b}$, N étant le nombre total de pays[31] ; ceci provient d'abord de l'hypothèse assez naturelle selon laquelle le transfert devrait être proportionnel à la réduction de la

[30] Dans le jeu précédent elle était passive en ce qui concernait le niveau de cette taxe et en cohérence avec cette hypothèse elle ne tenait pas compte du dommage environnemental dans son calcul de bien - être.

[31] Ici on développe le jeu en faisant apparaître explicitement le nombre total de pays mais les résultats seraient inchangés si 'on supposait que $N = 1$.

consommation dans la zone A[32] résultant de la mise en place de la taxe carbone q (en l'occurrence $\frac{(1-n)Nq}{b}$): en effet la zone B a un intérêt direct à la réduction de la consommation dans la zone A, parce que cette réduction diminue le dommage que cette zone B subit, et donc le transfert peut être lié directement à cette réduction de consommation ; ensuite il convient de valoriser ce transfert et il semble là aussi assez naturel d'utiliser θ, qu'on peut considérer comme le "prix" du dommage vu de la zone B (on arrive donc à un transfert $\frac{(1-n)Nq\theta}{b}$) ; il reste à expliquer le facteur $\frac{1}{2}$: un facteur strictement inférieur à 1 se justifie par le fait qu'on suppose que la zone B ne veut pas dispenser d'effort la zone A et aussi qu'elle ne veut pas d'un transfert trop coûteux ; le taux de $\frac{1}{2}$ est exogène ; il facilite la résolution et permet d'assurer que $\theta \geqslant q$ sans que la proportion de pays financeurs soit proche de 1, ce qui serait irréaliste au plan économique ; il est à noter que l'idée d'un lien du transfert financier avec la réduction de la consommation dans la zone subventionnée est inspirée d'un article de Jon Strand (2011) mais elle est modifiée ici à plusieurs égards et notamment par la prise en compte dans le transfert de la taxe carbone de la zone qui subventionne et elle est adaptée à un contexte tout à fait différent (dans l'article de Strand les deux zones de consommation ne jouent pas l'une contre l'autre mais une des zones de consommation joue contre une zone de production) ;

- enfin, s'agissant du jeu dynamique, l'horizon de planification est la période $[0, T]$ et non $[0, +\infty[$; l'idée économique sous - jacente est que les acteurs sont myopes et ne voient pas au - delà d'une certaine date à cause de l'incertitude sur les possibles substituts à l'énergie fossile ou sur les technologies futures ; il y a aussi l'idée de décisions séquentielles dues à l'incapacité d'avoir une idée précise du futur, ce qui amène à prendre seulement les décisions qui ne handicapent pas ce futur avec l'intuition que peut - être des décisions complètement nouvelles

[32] Cette idée aurait été beaucoup moins naturelle dans le jeu précédent puisque la zone A n'y choisit pas sa taxe carbone.

et imprévisibles devront être prises plus tard ; au plan concret il est d'ailleurs frappant de voir que de nombreuses initiatives dans le domaine de la maîtrise du changement climatique ont un horizon limité dans le temps comme par exemple l'EU - ETS prévue pour 2013 - 2020 et qui ne prévoit rien au - delà ; au plan de la résolution technique du jeu, cette hypothèse (qui fait qu'il n'y a pas de "scrap value" à la date T) permet d'avoir une solution qui n'existerait pas avec un jeu à horizon infini et avec les autres hypothèses rappelées ci - dessus.

Avec ces hypothèses le jeu statique et le jeu dynamique sont étudiés successivement. Dans chacune de ces deux parties le raisonnement est le même: après avoir rappelé que l'optimum mondial dans lequel un régulateur mondial mettrait en place la taxe carbone unique idoine serait la meilleure solution et avoir résolu ce cas, qui est hors de portée toutefois des deux zones compte tenu de leur comportement de rivalité, on décrit et on resout ensuite la situation de passivité dans laquelle les deux zones ne font que subir le dommage environnemental ; puis on étudie et on resout la situation dans laquelle la zone B agit unilatéralement, ce qui limite un peu le dommage mondial mais ce qui crée aussi un effet d'aubaine au sein de la zone A (cet effet n'est pas un effet - prix puisque le prix est constant, l'effet vient de la moindre consommation mondiale d'énergie fossile due à l'action unilatérale de la zone B qui fait que le stock d'énergie fossile diminue moins que dans la solution de passivité avec pour résultat un moindre dommage environnemental et un plus grand bien - être pour la zone A) ; enfin on étudie et on résout la situation de jeu qui est la conséquence de la situation précédente: la zone B se rendant compte qu'une action unilatérale de sa part n'incite pas l'autre zone à agir (au contraire elle ne fait rien dans ce cas puisqu'elle bénéficie d'un effet d'aubaine[33]), elle préfère inciter l'autre

[33] Cet effet d'aubaine dans la zone A est bien suffisant pour que la zone B ne veuille pas mettre en oeuvre effectivement une action unilatérale car les deux zones sont rivales.
En outre, si la zone B pourrait améliorer un peu son payoff avec cette action unilatérale par rapport à la situation de passivité, elle espère néanmoins une amélioration de son propre payoff encore plus importante dans le jeu à venir du fait de la plus grande réduction du dommage environnemental consécutive à une action cette fois bilatérale et non plus unilatérale (la simulation confirme d'ailleurs que cette intuition est la bonne).

zone à agir par le truchement d'un transfert financier au profit de cette zone avec en contrepartie la mise en place d'une taxe carbone dans cette zone.

On ne s'intéresse qu'aux solutions pour lesquelles la taxe carbone est supérieure dans la zone B à celle dans la zone A. On recherche donc les solutions telles que $\theta \geqslant q$. En effet, pour la zone B financer une solution avec $q > \theta$ serait beaucoup plus coûteux ; il est donc naturel de supposer que le but de la zone B est simplement de réduire la différence entre la taxe carbone θ et la taxe carbone q, de façon à limiter la consommation par pays de la zone A et de l'amener quelque part au dessus de la consommation par pays de la zone B mais en la maintenant au -dessus de cette dernière de façon à ne pas provoquer un renversement de consommation. La condition pour que θ soit supérieur à q est que le nombre de pays de la zone B soit largement majoritaire ($n > \frac{1}{\sqrt[2]{2}}$ soit environ 70%). La raison de cette condition est que, le transfert de B vers A étant supposé proportionnel à $1 - n$, un nombre n trop petit impliquerait un transfert trop élevé qui permettrait de financer une taxe carbone dans la zone A qui pourrait être plus élevée que celle dans la zone B.

Une seconde condition est nécessaire: le dommage doit être inférieur à une valeur limite qui dépend aussi de n ; la raison en est qu'un dommage trop fort rendrait la consommation de la zone B négative du fait d'une taxe carbone alors très forte pour lutter contre ce dommage élevé (ce phénomène ne se produit pas dans la zone A car la taxe carbone y est plus faible).

Les payoffs peuvent aussi être calculés. Pour des raisons pratiques le recours à la simulation permet une comparaison aisée des payoffs dans le jeu et dans le situation de passivité. Le résultat principal est que, si les conditions nécessaires à l'existence d'une solution appropriée du jeu sont réunies (voir plus haut), non seulement la zone A a un payoff supérieur dans le jeu à son payoff dans le cas de passivité des deux zones face au dommage environnemental, mais aussi qu'il en est de même pour la zone B : malgré le transfert que celle - ci consent au profit de l'autre zone, la zone B a intérêt au jeu non coopératif. Ceci justifie sa démarche "taxe carbone contre transfert" auprès de l'autre zone au regard de ses intérêts propres. Au total le monde a un bien - être supérieur à celui du cas de passivité des deux zones face au changement climatique, bien que naturellement ce bien - être soit inférieur au bien - être optimal.

S'agissant du jeu dynamique on retrouve la première condition ci - dessus: le nombre de pays de la zone B doit être largement majoritaire ($n > \frac{1}{\sqrt[2]{2}}$ soit environ 70%) pour la même raison que celle déjà évoquée. On retrouve aussi la seconde condition du jeu statique: le dommage doit être inférieur à une valeur limite qui dépend aussi de n[34] ; la raison en est la même que pour le jeu statique.

Toutefois la nature dynamique du jeu fait apparaître d'autres conditions.

Compte tenu de l'existence d'un stock fini de ressources fossiles, cette ressource peut être épuisée ou non avant la date T. On choisit d'éliminer les solutions du jeu dans lesquelles la ressource est épuisée avant cette date car elles semblent écologiquement et économiquement peu satisfaisantes[35]. Pour assurer que le stock d'énergie fossile n'est pas épuisé à la fin de l'horizon de planification il faut que le dommage d soit supérieur à une valeur d_1 qui dépend du stock X_0 et qui décroît avec lui.

Toutefois, pour que le jeu ait alors une solution il faut aussi que, pour un stock initial X_0 donné, on ait $d_1 < d_2$. Cette condition est satisfaite si le stock initial d'énergie fossile dans le sol est suffisant.

Au total, le jeu dynamique a une solution conforme à l'objectif recherché si la zone A n'est qu'une frange du monde entier (une frange pouvant atteindre toutefois 30%), si le stock initial X_0 est suffisant et si le dommage est intermédiaire et situé entre deux valeurs $d_1\left(X_0\right)$ et d_2. On comprend bien la nécessité d'un stock initial suffisant pour que le stock ne soit pas épuisé à la date T. On connaît la raison de la contrainte $d < d_2$, qui est nécessaire pour éviter de comprimer trop la demande en zone B. La raison économique de la contrainte $d > d_1\left(X_0\right)$ mérite une explication.

[34] appellée d_2 pour la raison qui va apparaître juste ci dessous.

[35] Mathémathiquement ce choix revient à choisir la solution $X\left(T\right) > 0 \Longrightarrow \lambda_B\left(T\right) = 0$, à partir de la condition de transversalité pour la zone B par exemple:
$\lambda_B\left(T\right) X\left(T\right) = 0, X\left(T\right) \geq 0, \lambda_B\left(T\right) \geq 0.$
λ_B est le coût implicite du stock de pollution pour la zone B.

Supposons que dans la situation de passivité des deux zones face au changement climatique la trajectoire du stock soit telle qu'il soit épuisé bien avant T (ce sera bien le cas avec les valeurs numériques retenues dans notre simulation) ; alors, si le dommage était trop faible, l'action correctrice des taxes carbone dans le jeu serait limitée et la trajectoire du stock dans le jeu serait proche de celle du stock dans la situation de passivité et aboutirait aussi à un épuisement avant la date T.

Les payoffs peuvent aussi être calculés comme dans le jeu statique. Pour des raisons pratiques le recours à la simulation permet ici aussi une comparaison aisée des payoffs dans le jeu et dans le situation de passivité. Le résultat principal est le même dans le jeu dynamique que dans le jeu statique: si les conditions évoquées ci -dessus pour que le jeu dynamique ait une solution appropriée sont réunies, alors non seulement la zone A a un payoff supérieur dans le jeu dynamique à son payoff dans le cas de passivité des deux zones face au dommage environnemental, mais aussi il en est de même pour la zone B: malgré le transfert que celle - ci consent au profit de l'autre zone, la zone B a intérêt au jeu non coopératif. Ceci justifie sa démarche "taxe carbone contre transfert" au regard de ses intérêts propres. Au total le monde a un bien - être supérieur à celui du cas de passivité des deux zones face au changement climatique, bien que naturellement ce bien - être soit inférieur au bien - être optimal.

Au total, ces deux jeux sont une tentative pour modéliser la rivalité qui peut apparaître dans le domaine de la politique climatique entre les vieux pays riches et les pays pauvres et émergents. Certes des hypothèses simplificatrices sont nécessaires, notamment dans le jeu dynamique, pour pouvoir obtenir une solution: en particulier l'hypothèse d'un horizon temporel limité (sans "scrap value") et le recours à un jeu "Open Loop" plutôt que Markovien. Malgré ces limites, cette tentative met le focus sur un thème peu exploré jusqu'ici par la littérature théorique mais qui paraît important pour le futur, celui de la compétition dans le domaine de la politique climatique entre blocs de consommation sinon antagonistes du moins non coopératifs.

I.A Typologie de la littérature de référence

I.A.1 La question du pouvoir de marché

Il y a trois possibilités:

- seul le producteur a un pouvoir de marché ;
- seul le consommateur a un pouvoir de marché ;
- le producteur et le consommateur ont chacun un pouvoir de marché: monopole bilatéral.

Le focus est clairement mis sur la littérature relative à la troisième possibilité.

I.A.2 Points communs à cette littérature

- Jeux différentiels, continus et non coopératifs.
- Jeux déterministes, en information complète.
- Rareté physique de la ressource fossile. La plupart des jeux[36] ajoutent une rareté économique: la dernière goutte de pétrole ne sera jamais extraite car ses coûts d'extraction seront supérieurs au "choke price" (celui qui étouffe la demande et la ramène à zéro).
- Dommage environnemental amenant la mise en place d'une taxe carbone à visée Pigouvienne et stratégique (sauf les articles de Chou et Long et de Fuijiwara et Long qui sont des articles de commerce extérieur).
- Emploi de fonctions linéaires ou quadratiques (dommage quadratique ou linéaire, coût d'extraction linéaire, utilité quadratique) pour espérer trouver des solutions analytiques.

[36] L'exception: l'article de Wirl de 1994 dans lequel le coût d'extraction est nul.

I.A.3 Deux types de jeu dans cette littérature

- Les jeux simultanés dans lesquels les deux joueurs jouent en même temps à chaque instant.

- Les jeux de Stackelberg dans lesquels le "leader" joue avant le suiveur à chaque instant du jeu.

I.A.3.1 Jeux simultanés

S'agissant des jeux simultanés, ils sont en général Markoviens

Théoriquement ils peuvent être:

- soit Open Loop - la règle de décision qui détermine la variable de contrôle est une fonction du temps seulement -, et donc sans incohérence dans le temps, mais pas parfaits en sous jeu ;

- soit avec mémoire - la règle de décision est fondée aussi sur les variables passées et pas seulement sur la valeur de la variable d'état à l'instant considéré - ; ces jeux sont complexes et plus adaptés au temps discret qu'au temps continu ;

- soit Markoviens - la règle de décision qui détermine la variable de contrôle est une fonction de la variable d'état - , et donc sans incohérence dans le temps mais aussi parfaits en sous jeu car dans cette littérature les problèmes sont autonomes et à horizon infini.

En pratique, le cas Markovien est privilégié dans cette littérature car il est plus riche au plan économique. L'Open Loop sert de benchmark ou est employé quand on ne sait pas trouver de solution analytique autrement.

Pour les jeux Markoviens:

- pas d'obsolescence du stock de $CO_2 \Longrightarrow$ une seule variable d'état $\Longrightarrow$ possibilité d'une solution analytique explicite ; le cas de presque tous les articles ;

- obsolescence du stock de $CO_2 \Longrightarrow$ deux variables d'état$\Longrightarrow$ pas de solution analytique explicite ; cas du premier article de 1995 de Wirl ;

- aucune contrainte ne "mord" $\Longrightarrow$ des solutions non linéaires et une solution linéaire ; cette dernière doit être privilégiée car elle offre un meilleur bien - être ;

- une contrainte "mord" à un moment $\Longrightarrow$ une seule solution, non linéaire.

Résolution des jeux Markoviens à partir de l'équation d'Hamilton - Jacobi - Bellman (HJB) ou du principe du maximun. En pratique plutôt un recours dans cette littérature à l'équation HJB, avec méthode d'identification pour trouver les solutions linéaires (avec chez Wirl une variante par sommation des équations HJB).

Résolution des jeux Open Loop par le principe du maximum.

I.A.3.2 Jeux de Stackelberg

Les jeux de Stackelberg sont Markoviens et de deux types

Les jeux de Stackelberg Open Loop sont en général sujets à l'incohérence temporelle: ils sont par conséquent absents de cette littérature. Les jeux de Stackelberg cités sont donc Markoviens, de deux types:

- "hierarchical[37] feedback Stackelberg": le "leader" annonce dès le début du jeu une stratégie linéaire $aX + b$, X étant la variable d'état ; après calcul de la fonction de réaction du suiveur à chaque instant, dans certaines situations on trouve a et b constants, et donc une règle de décision constante dans le temps et l'incohérence temporelle est évitée ; il n'y a de solution que dans des cas particuliers (articles de Chou et Long et de Fuijiwara et Long) ;

- "stagewise feedback Stackelberg": à chaque instant le "leader" fait le choix optimal connaissant la fonction de réaction du suiveur $\Longrightarrow$ pas d'incohérence

[37] Ou "global feedback Stackelberg".

temporelle. Plus de cas avec solutions. Bien noter que ce concept suppose que le "leader" agit avant le suiveur à chaque instant.

Résolution pour les "stagewise feedback Stackelberg": intégration de la fonction de réaction du suiveur dans l'équation HJB du "leader".

Pour les cas de "hierarchical feedback Stackelberg": on postule une stratégie $aX + b$ du "leader" avec a et b constants mais inconnus à ce stade ; on calcule par l'équation HJB la réponse du suiveur à la stratégie linéaire constante du "leader" ; on se sert de cette fonction de réaction du suiveur pour calculer le flux actualisé du bien - être du "leader" ; on maximise l'expression obtenue par rapport à a et b, ce qui permet de trouver les coefficients constants a et b (quand il y a une solution!).

Chapter II

Carbon tax and OPEC's rents under a ceiling constraint

1 Introduction

Three key lessons stand out from the Copenhagen Summit in December 2009. First, the agreement recognizes the need for the temperature rise to stay below 2 degrees Celsius, which is usually associated with a greenhouse gas concentration ceiling of 450 ppm (IPCC (2007)). This shared objective is a significant progress obtained in Copenhagen. The two other lessons are less constructive: the inability of the largest emitting countries to reach even a basic effective agreement on an international policy architecture designed to aim towards this common objective; and OPEC's hostility to any international agreement which would finally result in a sensible contraction of world oil demand. OPEC repeatedly argues that climate policy is still another excuse to steal the oil rent to finance public spending in oil importing countries, and even asks for compensation for the reduction of its income.

That OPEC does not contemplate introducing a climate policy, and reacts negatively when oil importing countries do, is not entirely surprising. As Wirl and Dockner (1995) mentioned, an example of such strategic OPEC's reaction is the oil price increase of $4 per barrel in the 1992's first-half, matching the first step of the

[0] This chapter is co-written with Lionel Ragot and Katheline Schubert.

EEC proposal of a hybrid energy-carbon tax[1]. The crude oil price increase allows OPEC to make climate policy to a certain extent useless since it may be sufficient to trigger the demand decrease desired by consuming countries. By doing so, OPEC captures a part of what we can call the carbon or climate rent.

However, oil consuming countries can also behave as a coalition and adopt a carbon tax which allows them to reap some part of the oil rent[2]. A global climate agreement of oil importing countries coordinating their carbon taxation could be interpreted as a consumers' cartel, would it happen to exist[3]. The implementation of a high carbon tax could prompt OPEC to lower its producer price in order to limit the decrease of oil demand.

Since the increases in oil price between 1998 and 2008, and especially the very strong increase of summer 2008, many OECD countries have led the idea that the government must control the consumer price of oil and that, to do so, taxes on energy should be "floating", or "additional", to use two terms coined in France: they should decrease when the producer price increases, and *vice versa*. This proposal is clearly a bad one, as OECD (2006) points out, for strategic reasons: "If oil importers start to reduce taxes in order to stabilise tax-inclusive fuel prices, oil exporters will know that they can at no risk increase their resource rents by restraining their production and thus increase crude prices further. Normally such actions would trigger reductions in demand that could reduce the incomes of the oil producers, but the demand reductions will be absent if tax-inclusive user prices are kept stable by tax reductions."

What is the result of the previous two-sided strategic behaviour? Does the

[1] The initial level of this tax was set to \$3 per barrel, and the tax had to increase by \$1 a year until 2000. Finally, it was not adopted.

[2] Besides objectives of public spending financing and energy savings, the high levels of fuel taxes in the European countries can be viewed also as an attempt to capture a part of the scarcity and monopoly rents. On average, between one-third and one-half of the total price of unleaded gasoline is excise tax (38,7% in Denmark, 43,6% in France, 44,5% in United-Kingdom and 46,7% in Germany (IEA (2009)).

[3] Some oil consuming countries have already implemented carbon taxes: Finland, Denmark, Norway and Sweden since 1991, Switzerland in 2008, but these policies remain isolated. Cap and trade schemes have the same consequences but even the largest existing system, the EU-ETS, cannot be interpreted as a global agreement on climate policy.

producers' cartel capture the climate rent or does the consumers' cartel capture the scarcity and monopoly rents? Is the time path of extraction more or less conservative than what would be optimal? What are the consequences of strategic climate policy in terms of welfare and in terms of distribution among the two coalitions? These are the main questions we address in this paper.

They have to some extent already been addressed from a theoretical point of view by Wirl (1994), (1995), Tahvonen (1995), (1996), Rubio and Escriche (2001) and Liski and Tahvonen (2004). These papers solve a similar differential game between the producers' and the consumers' cartels, in a framework where global warming creates damages to consumers' welfare. They study the Markov Perfect Nash Equilibrium (MPNE) of the game, and compare it to some benchmarks.

Liski and Tahvonen (2004) "consolidate, clarify, and extend" the results obtained in these papers. They show that the optimal design of the carbon tax in the presence of two-sided strategic interactions generally deviates from a Pigouvian tax that internalizes only the environmental damage. Moreover, considering linear strategies, they solve explicitly the MPNE in the linear-quadratic case, and prove that when the damage is not too severe, the carbon tax shifts more rents than what is necessary to internalize the environmental externality whereas it is the contrary when the damage is large. They also study the time profile of the carbon tax and the producer price. If the damage is small, the carbon tax is decreasing with time and the producer price is increasing; if the damage is intermediate, both are increasing; if the damage is large, the carbon tax is increasing and the producer price decreasing. Finally, they conjecture that the sellers' payoff is always – whatever the damage is – lower and the buyers' payoff higher in the MPNE than in the pre-tax situation.

The aim of the present paper is to delve further into this question. We revisit the differential game between oil consuming and producing countries when the former shape their climate policy to take into account the existence of a physical upper limit on atmospheric carbon concentration, which overtaking would lead to catastrophic consequences. The level of this ceiling is based on scientific evidence. It has been set at 450 parts per million carbon dioxide equivalent by the Intergovernmental Panel on Climate Change in 2007, in its Fourth Assessment Report (IPCC (2007)), target which would provide a "reasonable chance" of averting warming beyond 2° Cabove pre-industrial temperature. Following the work of Allen *et al.* (2009) and Meinshausen *et al.* (2009), it has been recently argued that the correct way of thinking about global warming is in terms of a global "CO_2 emission budget", which overtaking would trigger temperature rises above 2°C because of all the uncertainties in the carbon cycle, the climate response to an increase in the atmospheric carbon concentration, and the natural decay. This global carbon budget is exactly equivalent to a cap on carbon atmospheric concentration, provided that natural carbon absorption by sinks is negligible. The precise level of the ceiling is of course dependent on current scientific knowledge and likely to evolve. We shall nevertheless consider it as fixed. Finally, imposing a ceiling constraint beyond which damages become infinite does not mean that there exists no damage before the ceiling. Consistently with the existence of the ceiling, we assume that these damages are relatively small. We then combine in this paper a ceiling on atmospheric carbon concentration and a "small" damage function before (and at) the ceiling.

This ceiling framework was introduced in the theoretical litterature on optimal fossil resources extraction and global warming by Chakravorty, Magné and Moreaux (2006a), (2006b). Its introduction in a differential game raises a number of technical problems. Whereas in general linear-quadratic specifications make it possible to obtain explicitly a solution of the game, the linear one, the ceiling constraint introduces here an intrinsic non-linearity in the problem and we cannot expect to obtain a linear solution. We are nevertheless able to obtain a solution of the MPNE, which is non-linear .

We obtain implicit feedback rules and explicit time paths of extraction, carbon tax and producer price. We show that the producer and consumer prices are monotonically increasing in time, whereas the carbon tax may be first decreasing and is always increasing near the ceiling. As far as rent capture is concerned, we show that the carbon tax always shifts more rent than necessary for an environmental motive, meaning that consumers are able to reap some part of the scarcity and monopoly rents, and that producers are able to preempt to some extent the carbon tax only if the marginal damage under the ceiling is small.

We then compare the MPNE and three benchmarks. The comparison with the efficient equilibrium allows us to assess to what extent the carbon tax of the MPNE departs from the tax of the efficient equilibrium, designed to correct the environmental problem only. The comparison with the open loop equilibrium highlights the impact of the producers' and consumers' feedback strategies. The comparison with the cartel without carbon tax equilibrium which, as argued by Liski and Tahvonen (2004) is the proper benchmark since it is the pre-tax situation, allows us to see whether consumers gain in terms of welfare when they adopt a common environmental policy.

The paper is organized as follows. Section 2 presents the assumptions of the model, solves the Markov-perfect Nash equilibrium and studies its properties. Section 3 studies the three benchmarks against which the properties of the MPNE will be assessed. The equilibria are compared in Section 4. Section 5 concludes.

2 Markov-perfect Nash Equilibrium

We study the strategic interactions between a cartel of fossil fuel producers and a coalition of consumers coordinating their carbon emission taxation to fight global warming, in a differential games framework of analysis. Whereas producers set the fossil fuel price, consumers set the carbon tax in order to meet an atmospheric carbon concentration constraint based on scientific knowledge and taken as given, and to internalize the damage caused by the rise in temperature.

2.1 Consumers' area

In the consumers' area, the utility of the representative consumer is derived from the use of the fossil resource. The utility function is denoted $u(x_t)$, where x is the consumed resource flow (let's say oil). It is assumed to be quadratic and concave:

$$u(x) = ax - \frac{b}{2}x^2, \quad a > 0, \quad b > 0. \tag{II.1}$$

$u'(0) = a$ is the choke price, for which demand becomes nil.

The initial resource stock is X_0, the stock still in the ground at date t is X_t. The additional (to the pre-industrial level) atmospheric carbon concentration at date t is Z_t. We assume that natural carbon absorption is nil, so that the additional atmospheric carbon concentration at date t is strictly equal to the stock yet extracted and burnt at this date: $Z_t = X_0 - X_t$. This assumption has two justifications: firstly, natural absorption by sinks (oceans, forests) is uncertain and likely to decrease while carbon concentration increases; secondly and more technically, it allows us to consider only one stock in the problem and obtain tractable solutions.

Climate policy takes the form of a ceiling constraint: $X_0 - X_t \leq \overline{Z}$ where $\overline{Z}$ is the ceiling on the additional carbon stock. $\overline{Z}$ is a physical constraint, and can be seen as the global carbon budget allowing humanity to contain the rise of temperature under 2°C. But this does not mean of course that the rise of temperature does not cause any damage before the ceiling is reached. To be consistent with the choice of the value of the ceiling, it can be assumed that these damages are small – otherwise the ceiling would have been ill-chosen. We then introduce the damage that indeed appears before the ceiling, and we suppose this damage linear[4]:

$$D(X_t) = d(X_0 - X_t), \quad d > 0. \tag{II.2}$$

The buyers' regulator sets a unit carbon tax for the area to control the pollution

[4] Amigues *et al.* (2011) introduce such a framework.

accumulation due to the resource use, taking into account the demand function of the representative consumer, given by:

$$u'(x) = p + \theta, \tag{II.3}$$

where p is the producer price and θ the carbon tax. The regulator maximizes on the whole horizon the discounted net surplus, difference between the consumers' utility and the amount paid to producers, subject to the law of carbon accumulation in the atmosphere and the ceiling constraint. Tax revenues are reimbursed as lump-sum transfers to consumers, so they do not appear into the net surplus.

The two players act simultaneously, and the game is played with feedback (Markovian) strategies. The buyers' regulator, when choosing the carbon tax θ, takes into account the fact that the producer price depends on the resource stock, that is $p(X)$.

The buyers' regulator problem is[5]:

$$V_c^m(X_0) = \max_{\theta_t} \int_0^\infty e^{-\rho t} \left[u\left(x\left(p\left(X_t\right)+\theta_t\right)\right) - p(X_t)x\left(p\left(X_t\right)+\theta_t\right) - D\left(X_t\right) \right] dt$$

$$\text{s.t.} \left| \begin{array}{l} \dot{X}_t = -x\left(p\left(X_t\right)+\theta_t\right) \\ X_0 - X_t \leq \overline{Z} \\ X_0,\ \overline{Z} \text{ given.} \end{array} \right. \tag{II.4}$$

Let λ_c be the shadow price of the resource and ω the Lagrange multiplier associated to the ceiling constraint. First order optimality conditions and the

[5] Superscript m for Markov. We will use in what follows the superscripts o for optimum/efficient equilibrium, ol for open loop equilibrium and c for cartel without tax equilibrium.

complementarity slackness condition read[6]:

$$\theta_t = \lambda_{ct} \tag{II.5}$$

$$\dot{\lambda}_{ct} = \rho\lambda_{ct} + p'(X_t)x_t + D'(X_t) - \omega_t \tag{II.6}$$

$$\lim_{t\to\infty} e^{-\rho t}\lambda_{ct}X_t = 0 \tag{II.7}$$

$$\omega_t \geq 0,\ X_t - X_0 + \overline{Z} \geq 0,\ \omega_t(X_t - X_0 + \overline{Z}) = 0. \tag{II.8}$$

Let T_m be the date at which the ceiling becomes binding. Given the structure of the problem, if the initial atmospheric carbon concentration is lower than the ceiling, which we assume, the ceiling will not be binding before T_m ($\omega_t = 0\ \forall t < T_m$), and will remain binding forever after T_m ($\omega_t > 0\ \forall t \geq T_m$). After the ceiling is reached, the resource consumer price, sum of the producer price and the carbon tax, remains equal to $u'(0)$, the price at which demand is choked, and $x = 0$.

Before the ceiling i.e. $\forall t < T_m$, equations (II.5) and (II.6) yield the following evolution of the carbon tax:

$$\dot{\theta}_t = \rho\theta_t + p'(X_t)x_t + D'(X_t). \tag{II.9}$$

(II.9) integrates into:

$$\theta_t = \left(e^{-\rho T_m}\theta_{T_m-}\right)e^{\rho t} - \int_t^{T_m} e^{-\rho(s-t)}D'(X_s)ds - \int_t^{T_m} e^{-\rho(s-t)}p'(X_s)x_s ds. \tag{II.10}$$

The carbon tax is the sum of three terms.

The first term on the right-hand side of equation (II.10) is what we may name

[6] Conventionally, Hamilton–Jacobi–Bellman equations are used to solve the MPNE because they yield directly strategies depending on the state variable, here X. We have prefered to use here the maximum principle, because the value function is potentially non-differentiable at the ceiling, and consequently discontinuities of the feedback rule at the ceiling are possible. The use of the maximum principle allows us to overcome this difficulty. Notice that the non-differentiability of the value function at the ceiling is equivalent to the discontinuity of the stock shadow price at the ceiling. We study this potential discontinuity in Appendix II.B and show that indeed it exists. We solve the same problem using Hamilton–Jacobi–Bellman equations in Appendix II.E, to convince the reader that we actually obtain the same strategies.

the "pure Hotellinian tax". It comes from the existence of the ceiling constraint and grows at the discount rate. The second term represent the "pure Pigouvian tax" of Liski and Tahvonen (2004). It is due to the existence of damages before the ceiling and is the usual discounted sum of future marginal damages. Without ceiling and small damage, T_m would tend to infinity and both terms would be nil[7]. There would then exist no environmental motive for taxation[8].

The third term on the right-hand side of (II.10) is the strategic component of the carbon tax. It represents the "pure import tariff" of Liski and Tahvonen (2004) if $p'(.) < 0$, and their "pure import subsidy" if $p'(.) > 0$. In the first case, the carbon tax is positive even absent any damage. Consumers tax oil more heavily than the environmental motive would require, and are thus able to reap to some extent the scarcity and monopoly rents of producers. In the second case, consumers subsidize oil consumption to correct the monopoly distorsion.

After the ceiling i.e. $\forall t \geq T_m$, equations (II.5) and (II.6) yield the following evolution of the carbon tax:

$$\dot{\theta}_t = \rho\theta_t + D'(X_t) - \omega_t. \tag{II.11}$$

Using the transversality condition (II.7), (II.11) integrates into:

$$\theta_t = \int_t^{\infty} e^{-\rho(t-s)}\omega_s ds - \int_t^{\infty} e^{-\rho(s-t)} D'(X_s) ds. \tag{II.12}$$

2.2 Producers' area

Producers face a unit extraction cost depending on the resource stock still in the ground. The smaller this stock the higher the marginal extraction cost: the last drop of oil is very costly to extract. More precisely, the unit extraction cost is $c(X_t)$,

[7] This comes from the transversality condition (II.7), since X_t would tend in the long run to a strictly positive value because of assumption (II.15) on the extraction cost function.

[8] Notice that we have chosen to separate here the Hotellinian and the Pigouvian parts of the carbon tax. It is a matter of definition and in the literature the tradition varies on this point: we could also have chosen to name "Pigouvian tax" the whole tax set for environmental motives.

with $c(X) > 0$, $c'(X) < 0$. We use the following linear specification:

$$c\,(X) = c_1 - c_2 X, \quad c_1 > 0, \quad c_2 > 0. \tag{II.13}$$

We make the assumption that initial extraction is profitable:

$$c(X_0) < u'(0) \Leftrightarrow X_0 > \frac{c_1 - a}{c_2}. \tag{II.14}$$

With a constant marginal extraction cost, scarcity is purely physical. Here, scarcity can be economic, in the sense that the marginal cost of extraction of the last drop of oil can be higher than the choke price. Following Liski and Tahvonen (2004), we therefore assume that economic scarcity is binding:

$$c(0) > u'(0) \Leftrightarrow c_1 > a. \tag{II.15}$$

Then the last drop will never be extracted; producers will stop extraction before and leave some oil in the ground. Without any environmental constraint – neither ceiling nor damage in our framework, they will leave in the ground a stock X_∞ defined by:

$$c(X_\infty) = u'(0) \Leftrightarrow X_\infty = \frac{c_1 - a}{c_2}. \tag{II.16}$$

We assume that producers do not intend to adopt any climate policy, but are perfectly aware that consumers do.

The sellers' regulator, when choosing the producer price, maximizes on the whole horizon its discounted profits, subject to the law of evolution of the resource stock:

$$\begin{aligned} V_p^m\,(X_0) = \max_{p_t} \int_0^\infty e^{-\rho t}\,(p_t - c(X_t))\, x\,(p_t + \theta\,(X_t))\, dt \\ \text{s.t.} \left| \begin{array}{l} \dot{X}_t = -x\,(p_t + \theta\,(X_t)) \\ X_0 \text{ given.} \end{array} \right. \end{aligned} \tag{II.17}$$

Producers are assumed to be aware of the reaction function of buyers to the state variable, $\theta(X)$.

The first order conditions give the producers' price strategy and the evolution of the shadow price of the resource λ_p, together with the transversality condition:

$$p_t = c(X_t) - \frac{x\left(p_t + \theta\left(X_t\right)\right)}{x'\left(p_t + \theta\left(X_t\right)\right)} + \lambda_{pt} \tag{II.18}$$

$$\dot{\lambda}_{pt} = \rho\lambda_{pt} + (c'(X_t) + \theta'(X_t))x\left(p_t + \theta\left(X_t\right)\right) \tag{II.19}$$

$$\lim_{t\to\infty} e^{-\rho t}\lambda_{pt}X_t = 0. \tag{II.20}$$

In equation (II.18), $c(X) - \frac{x(.)}{x'(.)}$ is the static component of the monopoly price. The scarcity rent must be added to this static component.

Integrating equation (II.19) forward before the ceiling ($t < T_m$) yields:

$$\lambda_{pt} = \left(e^{-\rho T_m}\lambda_{pT_m-}\right)e^{\rho t} - \int_t^{T_m} e^{-\rho(s-t)}(c'(X_s) + \theta'(X_s))x_s ds. \tag{II.21}$$

The scarcity rent exhibits a Hotelling component, and a second component expressing the fact that a marginal amount of stock extracted at a given date s affects future profits by $c'(X_s) + \theta'(X_s)$, because of increased extraction costs and the variation of the consumers tax rate, which must be reflected in the current price. While the extraction cost effect clearly reduces future profits and increases the scarcity rent and today's price, the tax effect is at this stage ambiguous.

With the specification adopted for the utility function, the demand function is:

$$x(p + \theta) = \frac{a - (p + \theta)}{b}, \tag{II.22}$$

and (II.18) reads before the ceiling:

$$p = \frac{1}{2}\left[c(X) + a - \theta(X) + \lambda_p\right]. \tag{II.23}$$

This formulation highlights the two effects of the carbon tax on the producer price:

a negative static effect through the monopoly price (when θ increases, the cartel decreases p to support demand, and *vice versa*), and a dynamic effect through the scarcity rent. The sign of this last effect is at this stage indeterminate. If it is positive, it can be interpreted as a preemptive behaviour of the cartel: when the cartel extracts one unit of oil it knows that it will increase the atmospheric carbon concentration and that consequently the consumers' coalition will increase the carbon tax, and it reacts by increasing the producer price.

Consider now what happens after the ceiling is reached. Integrating (II.19) forward after T_m and using the transversality condition (II.20) shows that the scarcity rent is nil after the ceiling, which makes sense since the resource won't be extracted anymore. Then (II.18) yields $p_t = c(X_0 - \overline{Z}) = \overline{p}$, $t \geq T_m$. Then, since $p_t + \theta_t = u'(0)$ $t \geq T_m$, $\theta_t = u'(0) - \overline{p} = \overline{\theta}$, $t \geq T_m$.

Notice that nothing insures neither that the scarcity rent is continuous at the ceiling, i.e. that $\lambda_{pT_m-} = 0$, nor that the producer price and the carbon tax are.

2.3 The non-linear solution

In general, the Markov Perfect Nash Equilibria of differential games are studied under the assumptions of quadratic objective functions (utility, profit) and linear cost functions. Linear solutions are then the only ones that can be computed throughout analytically, even if other solutions may exist. But here, the ceiling constraint introduces an intrinsic non-linearity in the problem. Hence it is natural that the linear solution holds only if this constraint is not binding, that is if the ceiling is sufficiently high, so that the increase in unit extraction cost triggers the stop of extraction for economic reasons before the ceiling is reached. We make the opposite assumption that the ceiling is sufficiently low, so that it requires to stop extraction before the date at which it would have stopped spontaneously, and to leave more fossil fuel in the ground. The study of the linear solution, valid under the assumption of a high ceiling, is relegated to Appendix II.A.

The equilibrium of the game is characterized by equations (II.5) and (II.23) giving the carbon tax and the producer price depending on the shadow price of the resource respectively for consumers and producers, and equations (II.6) and (II.19) giving the evolution of these shadow prices.

2.3.1 Strategies before the ceiling

Considering the shadow prices λ_c and λ_p as functions of the resource stock, notice that $\dot{\lambda}_c = \lambda_c'(X)\dot{X} = -\lambda_c'(X)x$, and that the same holds for $\dot{\lambda}_p$. Then the sum of equations (II.9) giving the evolution of the carbon tax before the ceiling and (II.19) giving the evolution of the scarcity rent yields, at the equilibrium:

$$-\left(\theta'(X) + \lambda_p'(X)\right)x = \rho\left(\theta(X) + \lambda_p(X)\right) + (p'(X) + c'(X) + \theta'(X))x + D'(X)$$

i.e.

$$\rho\left(\theta(X) + \lambda_p(X)\right) + (p'(X) + c'(X) + 2\theta'(X) + \lambda_p'(X))x + D'(X) = 0. \tag{II.24}$$

Differentiating (II.23) w.r.t. X and replacing in (II.24) yields:

$$\rho\left(\theta(X) + \lambda_p(X) + \frac{D'(X)}{\rho}\right) + \frac{3}{2}(c'(X) + \theta'(X) + \lambda_p'(X))x = 0. \tag{II.25}$$

Wirl and Dockner (1995) suggests (in a somewhat different framework) to introduce a proper sum of the relevant variables in order to help solving the problem. One possibility here turns out to be:

$$\Phi\left(X\right) = c(X) + \theta(X) + \lambda_p(X) + \frac{D'(X)}{\rho}. \tag{II.26}$$

Equation (II.25) now reads:

$$\rho\left(\Phi(X) - c(X)\right) + \frac{3}{2}\Phi'(X)x = 0, \tag{II.27}$$

while, from (II.23) and using the assumption of a constant marginal damage (II.2),

$$p(X) + \theta(X) = \frac{1}{2}\left[a + \frac{d}{\rho} + \Phi(X)\right] \tag{II.28}$$

which can also be written:

$$a - bx = \frac{1}{2}\left[a + \frac{d}{\rho} + \Phi(X)\right]. \tag{II.29}$$

By elimination of x, (II.27) and (II.29) yield a non-linear differential equation in X:

$$\Phi'(X) = \frac{4\rho b}{3}\left(\frac{\Phi(X) - c(X)}{\Phi(X) - \left(a - \frac{d}{\rho}\right)}\right). \tag{II.30}$$

We assume that:

$$a > \frac{d}{\rho} \Leftrightarrow d < a\rho, \tag{II.31}$$

which means that at date 0 the choke price is higher than the discounted value of the marginal damage or, to put it differently, that the marginal damage before the ceiling is small.

We show in Appendix II.A that a linear solution to this equation exists, but that it is valid only in the case where the ceiling constraint is not binding. We want to find a solution in the case of a sufficiently stringent ceiling, in the sense that the oil stock that is left in the ground with the ceiling constraint is larger than the one that would be left without it (but taking into account the existence of the damage):

$$X_0 - \overline{Z} > \frac{c_1 - \left(a - \frac{d}{\rho}\right)}{c_2} = \widetilde{X}. \tag{II.32}$$

This solution has to be non-linear. Moreover, it is unique. Indeed, as shown by Tsutsui and Mino (1990), Dockner and Long (1993), Rowat (2007) and Wirl (2007), when the ceiling is not binding, (uncountably many) non-linear strategies coexist with the linear strategy. They all admit as a steady state an atmospheric carbon concentration lower than the one reached asymptotically by the Markov linear strategy, which amounts to say that the oil stock ultimately left in the ground is higher than $\widetilde{X}$. These non-linear strategies are Pareto-inferior to the linear one (Wirl and Dockner (1995)). But in our game the boundary condition (the ceiling) allows us to pin down the unique solution, among the non-linear ones, which admits as a steady state an atmospheric carbon concentration equal to $\overline{Z}$. The boundary condition rules multiple equilibria out.

It is not possible to find $\Phi(X)$ analytically, so we resort to a phase diagram (Figure II.1).

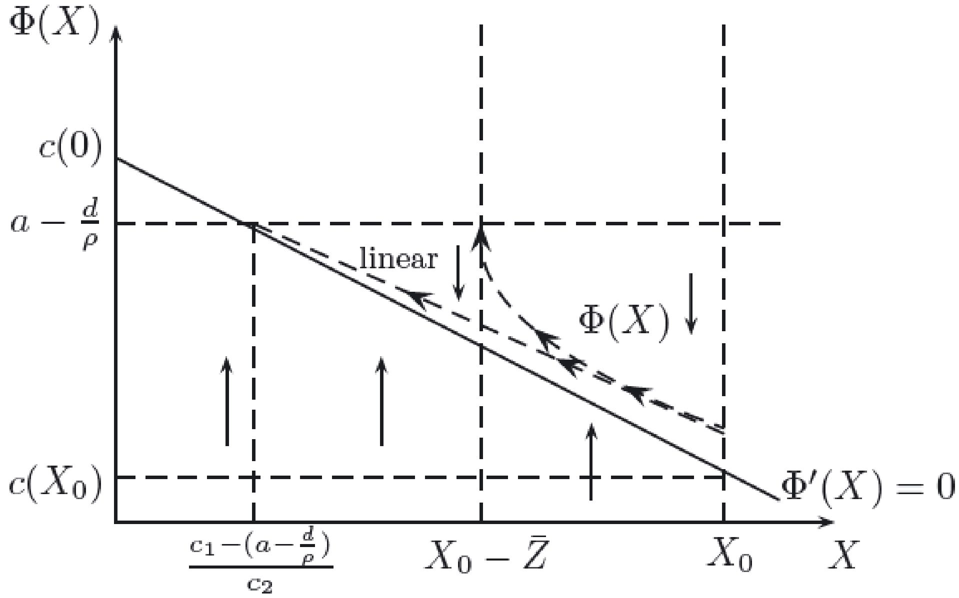

Figure II.1: Phase diagram $(X, \Phi(X))$

On the phase diagram, $\Phi'(X) = 0 \Leftrightarrow \Phi(X) = c(X)$; the admissible zone is under the line $\Phi(X) = a - \frac{d}{\rho}$, since $p + \theta = \frac{a+\frac{d}{\rho}+\Phi(X)}{2} < a \Rightarrow \Phi(X) < a - \frac{d}{\rho}$; $\Phi'(X) < 0$ when $\Phi(X) > c(X)$, and $\Phi'(X) > 0$ when $\Phi(X) < c(X)$; finally, $\Phi'(X) \to -\infty \Leftrightarrow \Phi(X) = a - \frac{d}{\rho}$. Starting from $\Phi(X_0) > c(X_0)$, the unique stable arm is travelled along from the right to the left, towards the equilibrium $\Phi(X_0 - \overline{Z}) = a - \frac{d}{\rho}$. X decreases, and as $\Phi'(X) < 0$, $\Phi(X)$ increases.

We can now express the feedback rules for extraction, the scarcity rent, the carbon tax and the producer price. Equation (II.29) is equivalent to

$$x = \frac{1}{2b}\left[a - \frac{d}{\rho} - \Phi(X)\right]. \tag{II.33}$$

From (II.19),

$$\rho\lambda_p(X) + \Phi'(X)x = 0. \tag{II.34}$$

i.e., with (II.33) and (II.30),

$$\lambda_p(X) = \frac{1}{2\rho b}\left[\Phi(X) - a + \frac{d}{\rho}\right]\Phi'(X) = \frac{2}{3}\left[\Phi(X) - c\,(X)\right]. \tag{II.35}$$

From (II.25), using (II.33), (II.35) and (II.30),

$$\theta(X) = \frac{1}{3}\left[\Phi(X) - c\,(X)\right] + \frac{d}{\rho}. \tag{II.36}$$

Finally, from (II.28), using (II.36),

$$p(X) = \frac{1}{6}\Phi(X) + \frac{1}{3}c(X) + \frac{1}{2}\left(a - \frac{d}{\rho}\right). \tag{II.37}$$

Notice that absent any damage before the ceiling ($d = 0$), the carbon tax is equal to half the scarcity rent ($\theta(X) = \lambda_p(X)/2 \quad \forall X$). This implies that the dynamic strategic effect of the carbon tax on the producer price is stronger than the static monopoly effect (see equation (II.23)), and that consequently the producers' cartel is able to preempt to some extent the carbon tax, as explained by Wirl (1995). This is not true anymore with damage: we now have $\theta(X) = \lambda_p(X)/2 + d/\rho$, and preemption is all the less likely since d is large. On the phase diagram, the carbon tax can be read as d/ρ plus one third of the vertical distance between the curve $\Phi(X)$ and the line $\Phi'(X) = 0$ (see equation (II.36)).

2.3.2 At the ceiling

At the ceiling, x is nil, X is equal to $X_0 - \overline{Z}$, and we have shown that, $\forall t \geq T_m$:

$$p_t = \overline{p} = c\left(X_0 - \overline{Z}\right) \tag{II.38}$$

$$\theta_t = \overline{\theta} = a - c\left(X_0 - \overline{Z}\right) \tag{II.39}$$

$$\omega_t = \overline{\omega} = \rho\overline{\theta} - d. \tag{II.40}$$

The producer price at the ceiling is equal to the unit extraction cost. The level of the carbon tax is then such that demand is totally choked, since the consumer price is equal to the choke price a. The scarcity rent is nil.

2.3.3 Properties of the MPNE

Proposition 2.1. ***MPNE***

(i) Before the ceiling, the consumer and producer prices are monotonically increasing; the carbon tax may be first decreasing and then increasing, and is always increasing near the ceiling. The carbon tax includes an import tariff element.

(ii) The carbon tax and the producer price are not continuous at the ceiling, whereas the consumer price is. When reaching the ceiling, the carbon tax jumps upwards and the producer price jumps downwards to the marginal extraction cost.

Proof. Equation (II.28) shows that the consumer price is monotonically increasing in time, since $\Phi'(X) < 0$ and X is monotonically decreasing in time. Moreover, (II.28) and (II.38)–(II.39) show that the consumer price is continuous at the juncture, and equal to the choke price $u'(0) = a$.

Equation (II.36) yields:

$$\theta'(X) = \frac{1}{3}\left[\Phi'(X) - c'\left(X\right)\right].$$

As $\Phi'(X) < 0$ and $c'(X) < 0$, the sign of $\theta'(X)$ is indeterminate. However,

$$\lim_{X \to X_0 - \overline{Z}} \theta'(X) = -\infty,$$

and, by continuity, $\theta'(X) < 0$ and the carbon tax is increasing in time near the ceiling.

Equation (II.37) yields:

$$p'(X) = \frac{1}{6}\Phi'(X) + \frac{1}{3}c'(X) < 0.$$

Hence the producer price is increasing with time.

This proves part (i) of the proposition.

When $X \to X_0 - \overline{Z}$, (II.36) and (II.37) show that $\theta(X) \to \frac{1}{3}\left[\left(a - \frac{d}{\rho}\right) - c\left(X_0 - \overline{Z}\right)\right] + \frac{d}{\rho}$ and $p(X) \to \frac{1}{3}\left[2\left(a - \frac{d}{\rho}\right) + c\left(X_0 - \overline{Z}\right)\right]$. However at the ceiling, according to (II.39) and (II.38), $\theta_t = \overline{\theta} = a - c\left(X_0 - \overline{Z}\right)$ and $p_t = \overline{p} = c\left(X_0 - \overline{Z}\right)$. This proves part (ii) of the proposition. □

The jump of the control variables at the juncture date is the result of the strategic stance of the players in the MPNE. For instance, let's look at the producer price and consider the case where damage is very small. It has been proven that in this case the producer is able to preempt to some extent the carbon tax: the producer price is strictly greater than the static monopoly price ($\frac{1}{2}\left(a + C\left(X\right)\right)$). However the latter is strictly greater than the production cost $C\left(X\right)$. Then, due to the preemption, the producer price before the ceiling is always strictly greater than the production cost even when one tends towards the juncture date. As the price at the ceiling when $t > T_m$ is equal to the production cost, there is indeed a jump of the producer price, which is the direct consequence of the preemption.

Take notice also of the fact that the scarcity rent from the producer standpoint (λ_p) is not continuous at the junture either.

The important result lies in the first part of the Proposition. It concerns the time profile of the carbon tax and the producer price. Whereas the price increases along the whole trajectory, the carbon tax may be first decreasing, but always ends up increasing. Moreover, the carbon tax always includes an import tariff, allowing consuming countries to reap a part of the oil and monopoly rents. This result challenges the robustness of Liski and Tahvonen (2004) findings, namely that the carbon tax includes an import tariff when the damage is not too severe, whereas it includes an import subsidy when the damage is large.

2.3.4 Time paths before the ceiling

Though the feedback rules cannot be expressed as closed-form functions of X, it is possible to obtain the time paths of extraction, carbon tax and producer price implied by the MPNE. See figure II.2 below.

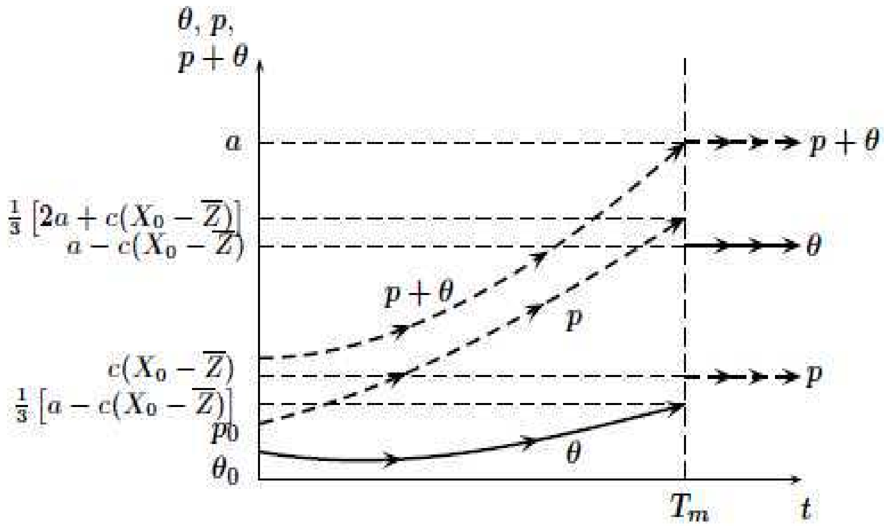

Figure II.2: MPNE: time paths of the producer price, the carbon tax and the consumer price

Differentiating (II.33) w.r.t. time and using (II.30) yields:

$$\dot{x} = -\frac{2\rho}{3}\left(\frac{\Phi(X) - c\,(X)}{\Phi(X) - \left(a - \frac{d}{\rho}\right)}\right)\dot{X}. \tag{II.41}$$

Notice that $\dot{x} = -\ddot{X}$ and that, from (II.33), $\Phi(X) - \left(a - \frac{d}{\rho}\right) = -2bx = 2b\dot{X}$. Equation (II.41) then reads:

$$\ddot{X} = \frac{\rho}{3b}\left(\Phi(X) - c\,(X)\right) = \frac{\rho}{3b}\left(2b\dot{X} + a - \frac{d}{\rho} - c\,(X)\right).$$

Replacing $c(X)$ by its linear specification (III.3), we obtain a second order differential equation in X :

$$3b\ddot{X} - 2\rho b\dot{X} - \rho c_2 X + \rho\left(c_1 - \left(a - \frac{d}{\rho}\right)\right) = 0. \tag{II.42}$$

The solution of this differential equation is:

$$X_t = \alpha_1 e^{v_1 t} + \alpha_2 e^{v_2 t} + \frac{c_1 - \left(a - \frac{d}{\rho}\right)}{c_2}, \tag{II.43}$$

with:

$$v_1 = \frac{\rho}{3}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{3c_2}{\rho b}}\right) > 0 \text{ and } v_2 = \frac{\rho}{3}\left(1 - \sqrt{1 + \frac{3c_2}{\rho b}}\right) < 0. \tag{II.44}$$

If the ceiling constraint never binds, that is if $X_0 - \overline{Z} \leq \frac{c_1 - \left(a - \frac{d}{\rho}\right)}{c_2} = \widetilde{X}$, the v_1 root can be ruled out as X_t can neither become negative (if $\alpha_1 < 0$) nor increase (if $\alpha_1 > 0$). In such a case, the solution is the linear one, where X converges asymptotically to $\widetilde{X}$. We have excluded this case. Under the opposite assumption, the two roots must be conserved and we obtain the non-linear solution.

Three equations are needed to determine implicitly the three unknown α_1, α_2, and T_m: the initial condition X_0, the condition at the ceiling $X_{T_m} = X_0 - \overline{Z}$, and the fact that extraction becomes nil at the ceiling[9], $x_{T_m} = 0$. These conditions read:

$$X_0 = \alpha_1 + \alpha_2 + \frac{c_1 - \left(a - \frac{d}{\rho}\right)}{c_2} \tag{II.45}$$

$$X_0 - \overline{Z} = \alpha_1 e^{v_1 T_m} + \alpha_2 e^{v_2 T_m} + \frac{c_1 - \left(a - \frac{d}{\rho}\right)}{c_2} \tag{II.46}$$

$$0 = v_1 \alpha_1 e^{v_1 T_m} + v_2 \alpha_2 e^{v_2 T_m}. \tag{II.47}$$

Equations (II.46) and (II.47) yield:

$$\alpha_1 = -\frac{v_2}{v_1 - v_2}\left(X_0 - \overline{Z} - \widetilde{X}\right) e^{-v_1 T_m} > 0 \tag{II.48}$$

$$\alpha_2 = \frac{v_1}{v_1 - v_2}\left(X_0 - \overline{Z} - \widetilde{X}\right) e^{-v_2 T_m} > 0. \tag{II.49}$$

Then (II.45) yields

$$\frac{v_1 e^{-v_2 T_m} - v_2 e^{-v_1 T_m}}{v_1 - v_2} = \frac{X_0 - \widetilde{X}}{X_0 - \overline{Z} - \widetilde{X}}, \tag{II.50}$$

which gives T_m implicitly. It is an increasing function of $\overline{Z}$. It is also an increasing function of d. The existence of a small damage puts forward the juncture date: indeed, because of this damage, at each date oil consumption is lowered and the ceiling is reached later.

We can now obtain the time paths of the extraction, consumer price (from

[9] The proof is relegated to Appendix II.B.

(III.2)), scarcity rent (from (II.34) and (II.41)), carbon tax and producer price:

$$x_t = -\dot{X}_t = -v_1\alpha_1 e^{v_1 t} - v_2\alpha_2 e^{v_2 t} \tag{II.51}$$

$$p_t + \theta_t = a - bx_t = a + b(v_1\alpha_1 e^{v_1 t} + v_2\alpha_2 e^{v_2 t}) \tag{II.52}$$

$$\lambda_{pt} = -\frac{2b}{\rho}\dot{x}_t = \frac{2b}{\rho}\left(v_1^2\alpha_1 e^{v_1 t} + v_2^2\alpha_2 e^{v_2 t}\right) \tag{II.53}$$

$$\theta_t = \frac{1}{2}\lambda_{pt} + \frac{d}{\rho} = \frac{b}{\rho}\left(v_1^2\alpha_1 e^{v_1 t} + v_2^2\alpha_2 e^{v_2 t}\right) + \frac{d}{\rho} \tag{II.54}$$

$$p_t = a - \frac{d}{\rho} + \frac{b}{\rho}\left[v_1\alpha_1\left(\rho - v_1\right)e^{v_1 t} + v_2\alpha_2\left(\rho - v_2\right)e^{v_2 t}\right]. \tag{II.55}$$

3 Benchmarks

Three possible benchmarks are studied, against which the properties of the MPNE will be assessed: the efficient equilibrium, the open loop equilibrium of the game, and the cartel without carbon tax equilibrium. The first one allows us to assess whether the monopoly power of the producers' cartel and the strategic behaviour of the two players lead to too much or too little extraction, compared to what is optimal. The second one allows us to assess the effect of the feedback strategies on the producer price and the carbon tax. The last one is the proper benchmark, as argued by Liski and Tahvonen (2004), since it is the pre-tax situation. The comparison of the pre-tax and the MPNE outcomes for consumers shows whether consumers benefit in terms of welfare from the implementation of the carbon tax.

3.1 Optimum and efficient equilibrium

3.1.1 Optimum

The world central planner's problem reads[10]:

$$V^*(X_0) = \max_{x_t} \int_0^\infty e^{-\rho t} \left[u(x_t) - c(X_t)x_t - D(X_t) \right] dt$$

$$\text{s.t.} \left| \begin{array}{l} \dot{X}_t = -x_t \\ X_0 - X_t \leq \overline{Z} \\ X_0 \text{ given.} \end{array} \right. \tag{II.56}$$

Denoting by ν_t the shadow price of the resource stock and ω_t the Lagrange multiplier associated to the ceiling constraint, first order optimality conditions and the complementarity slackness condition are:

$$u'(x_t) = c(X_t) + \nu_t \tag{II.57}$$

$$\dot{\nu}_t = \rho\nu_t + c'(X_t)x_t + D'(X_t) - \omega_t \tag{II.58}$$

$$\lim_{t\to\infty} e^{-\rho t}\nu_t X_t = 0 \tag{II.59}$$

$$\omega_t \geq 0,\ X_t - X_0 + \overline{Z} \geq 0,\ \omega_t(X_t - X_0 + \overline{Z}) = 0. \tag{II.60}$$

Before the ceiling, the marginal utility on the optimal path is the sum of the marginal extraction cost and of a rent ν_t, encompassing the scarcity rent and the carbon shadow value, in this simplified framework where the same stock characterizes the fossil resource stock in the ground and the atmospheric carbon concentration.

It is possible to show that extraction x is continuous at the juncture, in the same line as for the MPNE. Then, from (II.57), the costate ν is also continuous at the juncture.

[10] Notice that it is exactly equivalent to the problem without ceiling but with an initial resource stock $X_0 - \overline{Z}$.

Differentiating (II.57) w.r.t. time and using (II.58) yields:

$$u''(x)\dot{x} = c'(X)\dot{X} + (\rho\nu + c'(X)x + D'(X) - \omega) = \rho\nu + D'(X) - \omega.$$

Before the ceiling, $\omega = 0$ and we get, using (II.57) again, the optimal extraction path:

$$u''(x)\,\dot{x} = \rho\left(u'(x) - c(X)\right) + D'(X). \tag{II.61}$$

With the specifications adopted for the utility, damage and extraction cost functions, (II.61) reads:

$$b\ddot{X} - \rho b\dot{X} - \rho c_2 X + \rho\left(c_1 - \left(a - \frac{d}{\rho}\right)\right) = 0, \tag{II.62}$$

a linear differential equation of the second order, as in the MPNE, but with different coefficients.

The solution is:

$$X_t = \beta_1 e^{u_1 t} + \beta_2 e^{u_2 t} + c_1 - \left(a - \frac{d}{\rho}\right), \tag{II.63}$$

with

$$u_1 = \frac{\rho}{2}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{4c_2}{\rho b}}\right) > 0 \text{ and } u_2 = \frac{\rho}{2}\left(1 - \sqrt{1 + \frac{4c_2}{\rho b}}\right) < 0. \tag{II.64}$$

As in the case of the MPNE, three boundary conditions allow us to obtain the unknown β_1, β_2 and T_o : the initial condition X_0, the condition at the ceiling $X_{T_o} = X_0 - \overline{Z}$, and the fact that extraction becomes nil at the ceiling, $x_{T_o} = 0$. With the same argument as in the MPNE, it is possible to show that $\beta_1, \beta_2 > 0$.

At date T_o, the ceiling is reached, and we have, $\forall t \geq T_o$:

$$\begin{cases} X_t = X_0 - \overline{Z} \\ x_t = 0 \\ \nu_t = u'(0) - c(X_0 - \overline{Z}) \\ \omega_t = \rho \nu_t - d. \end{cases} \tag{II.65}$$

3.1.2 Efficient competitive equilibrium

The decentralization of the optimum leads to an efficient competitive equilibrium, provided that the right environmental tax –redistributed by lump-sum transfers to consumers– is implemented in the consumers' area.

The demand function of the representative consumer is given by:

$$u'(x) = p + \theta.$$

On the producer side:

$$V_p^o(X_0) = \max_{x_t} \int_0^\infty e^{-\rho t} \left[p_t - c(X_t)\right] x_t dt \tag{II.66}$$
$$\text{s.t.} \quad \dot{X}_t = -x_t, \quad X_0 \text{ given.}$$

Denoting by λ_p the scarcity rent, the first order conditions read:

$$p_t = c(X_t) + \lambda_{pt} \tag{II.67}$$

$$\dot{\lambda}_{pt} = \rho \lambda_{pt} + c'(X_t) x_t \tag{II.68}$$

$$\lim_{t \to \infty} e^{-\rho t} \lambda_{pt} X_t = 0. \tag{II.69}$$

The equilibrium is then defined by:

$$u'(x_t) = c(X_t) + \lambda_{pt} + \theta_t. \tag{II.70}$$

Differentiating equation (II.70) w.r.t. time and using (II.68) yields:

$$b\ddot{X} - \rho b\dot{X} - \rho c_2 X + \rho(c_1 - a) = \dot{\theta} - \rho\theta. \tag{II.71}$$

Comparing (II.62) and (II.71) shows that for the equilibrium to be an optimum the carbon tax before the ceiling must be such that:

$$\dot{\theta}_t - \rho\theta_t = -d,$$

which integrates into

$$\theta_t = \left(\theta_{T_o} e^{-\rho T_o}\right) e^{\rho t} + \frac{d}{\rho}\left(1 - e^{-\rho(T_o - t)}\right), \quad \forall t \geq 0. \tag{II.72}$$

The optimal carbon tax is the sum of the Hotellinian tax and the pure Pigouvian tax.

Extraction x and the marginal extraction cost $c'(X)$ being continuous at the ceiling, (II.68) implies that $\dot{\lambda}_p - \rho\lambda_p$ is continuous, and yields, integrating forward and using the transversality condition (II.69)[11],

$$\lambda_{pt} = -\int_t^{\infty} e^{-\rho(s-t)} c'(X_s) x_s ds, \quad \forall t \geq 0. \tag{II.73}$$

Then, as $x_s = 0$, $s \geq T_o$, $\lambda_{pT_o} = 0$. The scarcity rent is continuous at the juncture, and equal to 0. Then the carbon tax is also continuous, and it is equal to $\overline{\theta}$ given by (II.39). This allows us to obtain the initial level of the carbon tax: $\theta_0 = \overline{\theta} e^{-\rho T_o} + \frac{d}{\rho}\left(1 - e^{-\rho T_o}\right)$. Moreover, it is straightforward to show that the carbon tax is monotonically increasing iff $\overline{\theta} > d/\rho$ which, according to the definition (II.39) of $\overline{\theta}$, is true when the ceiling is binding.

Equations (II.67) and (II.68) show that the producer price is monotonically increasing before the ceiling. Moreover, by (II.67), the producer price is continuous

[11] Notice that the same reasoning cannot be made in the case of the MPNE, since we are not sure that $\theta'(X)$ is continuous.

at the juncture and equal to $\overline{p}$ given by (II.38).

These results are summarized in the following proposition.

Proposition 3.1. ***Efficient equilibrium***

(i) Before the ceiling, the carbon tax is the sum of a pure Hotellinian tax and a pure Pigouvian tax, monotonically increasing, and the producer price is also monotonically increasing.

(ii) The carbon tax and the producer price are continuous at the ceiling.

3.2 Open loop equilibrium

In this case, the players base their strategies on time alone.

The consumers' regulator problem is similar to problem (II.4), but for the fact that he takes the producer price as given. Equally, the producers' regulator problem is similar to (II.17), but for the fact that he takes the carbon tax as given.

The first order optimality conditions are, on the consumers' side:

$$\theta_t = \lambda_{ct} \tag{II.74}$$

$$\dot{\lambda}_{ct} = \rho\lambda_{ct} + D'(X_t) - \omega_t \tag{II.75}$$

$$\lim_{t\to\infty} e^{-\rho t}\lambda_{ct}X_t = 0, \tag{II.76}$$

which shows that before the ceiling the carbon tax is the sum of the Hotellinian tax and the Pigouvian tax.

On the producer side, the first order optimality conditions read:

$$p_t = \frac{1}{2}\left[c(X_t) + a + \lambda_{pt} - \theta_t\right] \tag{II.77}$$

$$\dot{\lambda}_{pt} = \rho\lambda_{pt} + c'(X_t)x_t \tag{II.78}$$

$$\lim_{t\to\infty} e^{-\rho t}\lambda_{pt}X_t = 0. \tag{II.79}$$

The equilibrium before the ceiling is characterized by:

$$u'(x) = p + \theta \Longleftrightarrow a - bx = \frac{1}{2}\left[c(X) + a + \theta + \lambda_p\right]. \tag{II.80}$$

Differentiating (II.80) w.r.t. time and using (II.75) and (II.78) yields:

$$2b\ddot{X} - 2\rho b\dot{X} - \rho c_2 X + \rho\left(c_1 - \left(a - \frac{d}{\rho}\right)\right) = 0, \tag{II.81}$$

again a linear differential equation of the second order, but with different coefficients.

The solution has the same form as in the MPNE and the efficient equilibrium:

$$X_t = \gamma_1 e^{w_1 t} + \gamma_2 e^{w_2 t} + \frac{c_1 - \left(a - \frac{d}{\rho}\right)}{c_2}, \tag{II.82}$$

with

$$w_1 = \frac{\rho}{2}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{2c_2}{\rho b}}\right) > 0 \text{ and } w_2 = \frac{\rho}{2}\left(1 - \sqrt{1 + \frac{2c_2}{\rho b}}\right) < 0. \tag{II.83}$$

As in the cases of the MPNE and the efficient equilibrium, three boundary conditions allow us to obtain the unknown γ_1, γ_2 and T_{ol}, the date at which the ceiling is reached: the initial condition X_0, the condition at the ceiling $X_{T_{ol}} = X_0 - \overline{Z}$, and the fact that extraction becomes nil at the ceiling, $x_{T_{ol}} = 0$. It is possible to show that $\gamma_1, \gamma_2 > 0$.

Proposition 3.2. ***Open loop equilibrium***

(i) Before the ceiling, the carbon tax is the sum of a Hotellinian tax and a Pigouvian tax and is always increasing, whereas the producer price may be first increasing and then decreasing, and is decreasing when approaching the ceiling.

(ii) The carbon tax and the producer price are continuous at the ceiling.

Proof. To prove part (ii), remark that λ_p is continuous at the juncture by the same argument as in the efficient equilibrium case. Its continuity implies that of the carbon tax (from (II.80)) and the producer price.

To prove part (i) note first that the consumer price is increasing as:

$$p + \theta = a + b\dot{X} \Rightarrow \frac{d(p+\theta)}{dt} = b\ddot{X} > 0.$$

As far as the carbon tax before the ceiling is concerned, (II.74) and (II.75) show that it has the same expression than in the efficient equilibrium (equation (II.72)), hence has the same properties. Finally, the sign of $\dot{p}$ is indeterminate. However at the juncture at date T_{ol}, using (II.77) and (II.78),

$$\dot{p}_{T_{ol}-} = -\frac{1}{2}\dot{\theta}_{T_{ol}-} < 0.$$

This proves part (i) of the proposition. □

The discontinuity of the carbon tax and the producer price at the juncture at the MPNE is then the consequence of the feedback strategies of the players, since this discontinuity does not exist at the open loop equilibrium.

3.3 Cartel equilibrium without carbon tax

This equilibrium can be seen as the present situation, where everybody is aware of the existence of the physical limit $\overline{Z}$ to atmospheric carbon concentration but ignores it.

The buyers' demand for oil is simply given by:

$$u'(x) = p.$$

The sellers' regulator solves the same problem as in the open loop game, but for the fact that now the carbon tax is nil. The equilibrium is characterized by equation (II.81), as in the open loop game; but now producers behave as if no constraint could prevent them from extracting all what is economically profitable. They intend to leave asymptotically X_∞ in the ground, and choose the extraction path accordingly.

In the solution of the linear differential equation (II.81), the positive exponential has to be ruled out. Therefore the time path of oil stock and extraction are:

$$X_t = (X_0 - X_\infty)\, e^{w_2 t} + X_\infty \tag{II.84}$$

$$x_t = -w_2\,(X_t - X_\infty) \tag{II.85}$$

with w_2 given in (II.83).

But ignoring the ceiling does not make it disappear. Once the ceiling is reached, the damage from consuming more oil becomes infinite whereas the marginal utility of consumption remains finite, and therefore consuming countries are not willing to buy oil any more, even under a zero tax. Extraction drops to zero in finite time (at date T_c), while a stock of oil $X_{T_c} = X_0 - \overline{Z}$ is left forever in the ground. From (II.84) we get:

$$T_c = \frac{1}{w_2}\ln\frac{X_0 - \overline{Z} - X_\infty}{X_0 - X_\infty}. \tag{II.86}$$

Finally, the producer price is given by:

$$p_t = a + b w_2\,(X_0 - X_\infty)\, e^{w_2 t}, \quad t \leq T_c, \tag{II.87}$$

from which we deduce $p_{T_c} = a + b w_2 \left(X_0 - \overline{Z} - X_\infty\right) < a$.

These results are summarized in the following proposition:

Proposition 3.3. *Cartel without tax equilibrium*

Producers and consumers behave as if the ceiling did not exist. The resource price is an increasing and concave function of time. It is lower than the choke price at the ceiling, where it jumps upwards to the choke price while extraction jumps downwards to zero.

4 Comparison of equilibria

The comparison of the MPNE and the efficient equilibrium allows us to assess to what extent the carbon tax of the MPNE departs from the Pigouvian tax of the efficient equilibrium, designed to correct the environmental problem only, and to see if the game is more or less conservative than what is optimal. The comparison of the MPNE and the open loop equilibrium highlights the impact of the producers' and consumers' feedback strategies. Finally, the comparison of the MPNE and the cartel without carbon tax equilibrium allows us to see whether consumers gain in terms of welfare when they adopt a common environmental policy.

Technically, the comparison is made easier by the fact that all equilibria reach in finite time the same state, where a stock of oil $X_0 - \overline{Z}$ is left in the ground, atmospheric carbon concentration is at the ceiling and oil consumption is nil. What changes in the different equilibria is the intertemporal allocation of extraction, driven by different producer prices and carbon taxes, and thus producers and consumers' payoffs.

Proposition 4.1. *(i) The MPNE is more conservative than the open loop equilibrium, in the sense that initial extraction is lower. Both are excessively conservative, compared to what is efficient, and are also more conservative than the cartel without tax equilibrium. The ceiling is reached later in the MPNE than in the open loop equilibrium, and later in the open loop equilibrium than in the efficient equilibrium and than in the cartel without tax equilibrium. The cartel without tax equilibrium is less conservative than the efficient equilibrium and the ceiling is reached sooner if it is low; it is the contrary if the ceiling is high.*

(ii) The ranking of the payoffs for the producers' and the consumers' area respectively are: $V_p^{ol}(X_0) > V_p^m(X_0) > V_p^o(X_0) = 0$ *and* $V_c^o(X_0) > V_c^{ol}(X_0) > V_c^m(X_0)$*. When the marginal damage is small enough, the consumers' area gets a higher payoff in the MPNE than in the cartel without tax case if the ceiling is high; it is the contrary if the ceiling is low.*

Proof. (i) We prove in Appendix II.C that $T_m > T_{ol} > T_o$, $T_{ol} > T_c$, and that $x_0^o > x_0^{ol} > x_0^m$, $x_0^c > x_0^{ol}$. Notice that we cannot deduce the ranking of initial extractions from the ranking of the dates at which the ceiling is reached and the fact that total extraction is the same in the three equilibria, because in some of the equilibria extraction can be convex-concave. It may be the case for instance in the MPNE since θ_t can be first decreasing and then increasing and $\ddot{x}_t = -\frac{\rho}{b}\dot{\theta}_t$.
The comparison of T_c and T_o on the one hand, x_0^c and x_0^o on the other hand is also relegated to Appendix II.C.
(ii) The ranking of payoffs is deduced from the ranking of initial extractions (except for the producers' payoff at the efficient equilibrium and both payoffs at the cartel without tax equilibrium), since $V_p^m(X_0) = \frac{b}{\rho}(x_0^m)^2$, $V_p^{ol}(X_0) = \frac{b}{\rho}\left(x_0^{ol}\right)^2$, $V_c^o(X_0) = \frac{b}{2\rho}(x_0^o)^2$, $V_c^m(X_0) = \frac{b}{2\rho}(x_0^m)^2$, $V_c^{ol}(X_0) = \frac{b}{2\rho}\left(x_0^{ol}\right)^2$, see Appendix II.E. The producers' payoff at the efficient equilibrium is nil.
For the cartel without tax equilibrium the Hamilton–Jacobi–Bellman equation cannot be used since consumers do not take into account the evolution of the stock in their problem (the damage is an externality). The consumers' payoff must be computed directly. We get

$$\begin{aligned} V_c^c(X_0) &= \max_x \int_0^\infty e^{-\rho t}\left[u(x_t) - p_t x_t - D(X_t)\right] dt \\ &= \frac{b}{2}\int_0^\infty e^{-\rho t} x_t^2 dt - d\int_0^\infty e^{-\rho t}(X_0 - X_t)dt, \end{aligned} \tag{II.88}$$

x_t and X_t being given by (II.84) and (II.85). We compare in Appendix II.D the consumers' payoffs $V_c^m(X_0)$ and $V_c^c(X_0)$ in the case $d = 0$ and prove the result stated in the Proposition. This result can be extended by continuity to d small. As $V_c^m(X_0)$ and $V_c^c(X_0)$ both are decreasing functions of d, it is not possible to obtain analytically a ranking of the payoffs for any value of d. □

This Proposition contains at least three strong results.

First of all, when the two players act strategically, the sellers win. They get a higher payoff than at the efficient equilibrium, whereas the buyers' payoff is reduced.

Secondly, consumers and producers are both better off in the open loop equilibrium than in the MPNE. In this sense, playing feedback strategies is a lose-lose situation, both parties ending up being worse off. There exists in this game a commitment value.

Lastly, when the ceiling is not too stringent and the marginal damage small enough, consumers gain in the MPNE with respect to the pre-tax case. To put it differently, consumers are better off with the carbon tax than without it if the global warming problem is not too severe. It's in this meaning that it can be said that the carbon tax can eat the OPEC's rent as Liski an Tahvonen put it. In this case indeed, consumers do not suffer from a too drastic reduction of their oil consumption whereas they benefit from the reduction of damages. Conversely, consumers may lose, and we are sure that this is the case if the marginal damage is small enough and the ceiling very stringent.

5 Conclusion

Studying the MPNE of a game between two coalitions of oil producing and oil consuming countries, Liski and Tahvonen (2004) show, within the damage function approach, that the carbon tax is not purely Pigouvian. If the damage is not too severe, it includes an import tariff element and exceeds the present value of marginal damages, allowing oil consuming countries to reap resource rents from the cartel of oil producers, whereas for a serious damage this element is an import subsidy and the strategic tax falls short of the Pigouvian one. The optimal design of the strategic tax (import subsidy or import tariff, tax increasing or decreasing in time) depends on the value of the parameter of the quadratic damage function, featuring the severity of the damage. This severity also determines the temporal profile of the strategic producer price: increasing when the damage is not too severe, decreasing otherwise. In terms of payoffs, Liski and Tahvonen conjecture that the strategic tax reduces the producers' payoff and enhances the consumers' payoff, compared to the pre-tax case, whatever the severity of the damage.

We revisit this game within the ceiling approach. We obtain a monotonically increasing strategic producer price before the ceiling, and a carbon tax which may be decreasing or increasing at the beginning of the planning horizon, but is always increasing near the ceiling, and this independently on the stringency of the ceiling and the severity of the "small" linear damage before the ceiling. Moreover, in this framework, the strategic tax includes an import tariff element whatever the stringency of the ceiling. These results challenge the robustness of the conclusions of the existing literature.

Compared to the open loop solution, behaving strategically is a lose-lose situation, both parties ending up being worse off. Compared to the pre-tax situation (the cartel without tax equilibrium), we prove that when the ceiling is tight and the "small" marginal damage small enough the consumers are worse off in the MPNE, whereas when the ceiling is relatively high they are better off. We do not confirm here the conjecture of Liski and Tahvonen (2004), which is that consumers always gain from introducing the carbon tax.

The practical discussions about the introduction of a carbon tax very often concentrate on the distributive consequences of the tax within each country and between countries adopting the environmental policy and countries refusing to do so, without considering a central actor in the climate change game, namely fossil fuel producers. We have in this paper contributed to fill this gap, in a two-zones framework. But a lot remains to be done.

Some very recent papers open new directions of research in this area. For instance Fujiwara and Long (2010) consider a game with Stackelberg leadership, where the leader can be the oil producing area or the oil consuming area, and wonder whether being the Stackelberg leader is better than being the follower or not. Compared to Rubio and Escriche (2001) they study two varieties of Stackelberg leadership, the global and the stagewise ones, but do not introduce the climate motive for oil taxation. Another path is opened by Wei *et al.* (2010), which consider that oil producing countries also consume oil, and can counteract climate policy by using a strategy of price discrimination, subsidizing the oil they consume. They only study the open loop equilibrium of the game.

In the same spirit, it would be very useful to distinguish between two different zones of oil consuming countries, a "Kyoto zone", setting a common carbon tax, and a "non-Kyoto zone" refusing to do so. In this three players game, the oil cartel's power should be enhanced, but the consequences of the unilateral climate policy on Kyoto and non-Kyoto countries is not trivial and deserves further research.

II.A The linear solution of the MPNE

We look for a linear solution $\Phi(X) = A + BX$ to equation (II.30). By identification of the terms, it is easy to see that the coefficients A and B satisfy the following equations:

$$B^2 - \frac{4\rho b}{3}B - \frac{4\rho b}{3}c_2 = 0,$$

$$A = \frac{\frac{4\rho b}{3}c_1 - B\left(a - \frac{d}{\rho}\right)}{\frac{4\rho b}{3} - B}.$$

The first equation admits two real roots, one positive and one negative. As we must have $\Phi'(X) < 0$ (see the phase diagram on Figure II.1), B is equal to the negative root:

$$B = \frac{2\rho b}{3}\left(1 - \sqrt{1 + \frac{3c_2}{\rho b}}\right).$$

We then have

$$A = \frac{2c_1 - \left(1 - \sqrt{1 + \frac{3c_2}{\rho b}}\right)\left(a - \frac{d}{\rho}\right)}{1 + \sqrt{1 + \frac{3c_2}{\rho b}}}.$$

The solution to equation (II.30) must satisfy $\Phi(X_0 - \overline{Z}) = a - \frac{d}{\rho}$ if the ceiling is binding, that is if $X_0 - \overline{Z} > \widetilde{X} = \frac{c_1 - \left(a - \frac{d}{\rho}\right)}{c_2}$, and $\Phi(\widetilde{X}) = a - \frac{d}{\rho}$ if the ceiling is not binding, that is if $X_0 - \overline{Z} \leq \widetilde{X}$. However, it is easy to check that $A + B\widetilde{X} = a - \frac{d}{\rho}$. The linear solution is then solution of the game in the case of a non-binding ceiling. In the opposite case, as Φ is linearly decreasing, $A + B(X_0 - \overline{Z}) < a - \frac{d}{\rho}$, and the linear solution cannot be solution of the game.

II.B Continuity of x at the juncture at the MPNE

We use the following result of optimal control (see Seierstad and Sydsaeter (1987) pp. 318–319) applied to the consumers' problem: the costate is continuous at T_m if $\left(X_t - X_0 + \overline{Z}\right)_{t=T_m} = 0$ and if $\left.\frac{d\left(X_t - X_0 + \bar{Z}\right)}{dt}\right|_{t=T_m}$ is not continuous (sufficient condition).

The first part of the condition is true by definition of T_m, the date at which the ceiling is reached.

Assume that $\left.\frac{d\left(X_t - X_0 + \bar{Z}\right)}{dt}\right|_{t=T_m} = \dot{X}_{T_m}$ is not continuous i.e. $\dot{X}_{T_{m-}} \neq 0$.

Hence from the previous result the costate θ is continuous at the juncture. Moreover, before the juncture, $\lambda_p = 2\left(\theta - \frac{d}{\rho}\right)$ (see (II.35) and (II.36)) is also continuous, and so is the sum of the costates of the consumers' and producers' problems $\lambda_p + \theta$.

Remind that at the ceiling $\lambda_p = 0$ and $\theta = a - c(X_0 - \overline{Z})$. Consequently when $t \to T_{m-}$ we must have $\theta + \lambda_p \to a - c(X_0 - \overline{Z})$.

However before the ceiling equation (II.29) yields $\theta + \lambda_p = a - c(X) + 2b\dot{X}$. Consequently, when $t \to T_{m_-}$, $\theta + \lambda_p \to a - c(X_0 - \overline{Z}) + 2b\dot{X}_{T_m}$.

Hence $\dot{X}_{T_{m-}} = 0$: a contradiction. We conclude that $\dot{X}$ is continuous at the juncture.

II.C Comparison of initial extractions, dates at which the ceiling is reached and payoffs

The structure of the solution is the same in the MPNE, the efficient equilibrium and the open loop equilibrium. Equation (II.50) gives the date T_m at which the ceiling is reached in the case of the MPNE:

$$\frac{v_1 e^{-v_2 T_m} - v_2 e^{-v_1 T_m}}{v_1 - v_2} = \frac{X_0 - \widetilde{X}}{X_0 - \overline{Z} - \widetilde{X}}. \tag{C1}$$

The same applies *mutatis mutandis* for the two other equilibria.

Let's define

$$F_v(T) = \frac{v_1 e^{-v_2 T} - v_2 e^{-v_1 T}}{v_1 - v_2}. \tag{C2}$$

We have:

$$F_v(0) = 1, \quad F_v(\infty) = +\infty, \quad F_v'(T) > 0, \quad F_v'(0) = 0, \quad F_v''(T) > 0.$$

$F_v(T)$ is an increasing and convex function of T, with an initial value of 1. (C1) reads

$$F_v(T_m) = \frac{X_0 - \widetilde{X}}{X_0 - \overline{Z} - \widetilde{X}} > 1. \tag{C3}$$

Then the solution T_m exists and is unique.

With obvious notations, we have, for the efficient and open loop equilibria respectively, $F_u(T_o) = \frac{X_0 - \widetilde{X}}{X_0 - \overline{Z} - \widetilde{X}}$ and $F_w(T_{ol}) = \frac{X_0 - \widetilde{X}}{X_0 - \overline{Z} - \widetilde{X}}$.

It can be proved that for $\forall T > 0,\ F_u(T) > F_w(T) > F_v(T)$. Let's prove it for the efficient equilibrium and the MPNE.

Indeed, if $T \sim 0$, a second-order approximation yields $F_v(T) \sim 1 - \frac{1}{2}v_1 v_2 T^2$ and $F_u(T) \sim 1 - \frac{1}{2}u_1 u_2 T^2$, with, according to (II.44) and (II.64), $-\frac{1}{2}v_1 v_2 = \frac{\rho c_2}{6b} < -\frac{1}{2}u_1 u_2 = \frac{\rho c_2}{2b}$. If, on the contrary, $T \gg 0$, $e^{-v_1 T} \sim 0$ and $e^{-u_1 T} \sim 0$. Hence:

$$\frac{F_v(T)}{F_u(T)} \sim \frac{v_1}{u_1} \frac{u_1 - u_2}{v_1 - v_2} \frac{e^{-v_2 T}}{e^{-u_2 T}} < 1$$

since $\frac{v_1}{u_1} \frac{u_1 - u_2}{v_1 - v_2} < 1$ and $u_2 - v_2 < 0$. Thus the $F_v(T)$ graph is under the $F_u(T)$ graph $\forall T > 0$, which yields $T_m > T_o$.

We prove along the same line that $T_{ol} > T_o$ and $T_m > T_{ol}$.

Let us now compare T_c, the date at which the ceiling is reached in the cartel without tax equilibrium, and T_{ol}. T_c is given by (II.86). $e^{-w_2 T}$, with $w_2 < 0$, is an increasing and convex function of T, taking the value 1 and with a slope $-w_2 > 0$ at the origin. If $T \sim 0$, $e^{-w_2 T} \sim 1 - w_2 T > 1 - \frac{1}{2}w_1 w_2 T^2 \sim F_w(T)$. Thus the $e^{-w_2 T}$ graph is above the $F_w(T)$ graph for T small. For $T \gg 0$, $e^{-w_1 T} \sim 0$, and

$$\frac{F_w(T)}{e^{-w_2 T}} \sim \frac{w_1}{w_1 - w_2} < 1.$$

Thus the $e^{-w_2 T}$ graph is also above the $F_w(T)$ graph for T large. Thus $T_c < T_{ol}$.

Let us now prove that T_c can be either smaller or greater than T_o, depending on the stringency of the ceiling.

We first consider the case where the marginal damage before the ceiling d is nil.

Then $\widetilde{X} = X_\infty$. We have:

$$e^{-w_2 T_c} = F_u(T_o) = \frac{X_0 - X_\infty}{X_0 - \overline{Z} - X_\infty}.$$

If $T \sim 0$, $e^{-w_2 T} \sim 1 - w_2 T > 1 - \frac{1}{2} u_1 u_2 T^2 \sim F_u(T)$. Thus the $e^{-w_2 T}$ graph is above the $F_u(T)$ graph for T small. If, on the contrary, $T \gg 0$, $e^{-u_1 T} \sim 0$, and

$$\frac{F_u(T)}{e^{-w_2 T}} \sim \frac{u_1}{u_1 - u_2} e^{(w_2 - v_2)T} \gg 1$$

since $\frac{u_1}{u_1 - u_2} > 0$ and $w_2 - u_2 > 0$. Thus the $e^{-w_2 T}$ graph is under the $F_u(T)$ graph for T large. Accordingly, Figure II.3 depicts the fact that there exists a threshold $\overline{\overline{Z}}$ for the value of the ceiling, for which $T_c = T_o$, under which $T_c < T_o$ and above which $T_c > T_o$.

Now, when $d > 0$, $\frac{X_0 - \widetilde{X}}{X_0 - \overline{Z} - \widetilde{X}} > \frac{X_0 - X_\infty}{X_0 - \overline{Z} - X_\infty}$. Then T_o increases with d, whereas T_c is independent on d. If $\overline{Z} < \overline{\overline{Z}}$, we have $T_c < T_o$ $\forall d$. If $\overline{Z} > \overline{\overline{Z}}$, we have $T_c > T_o$ for d not too large.

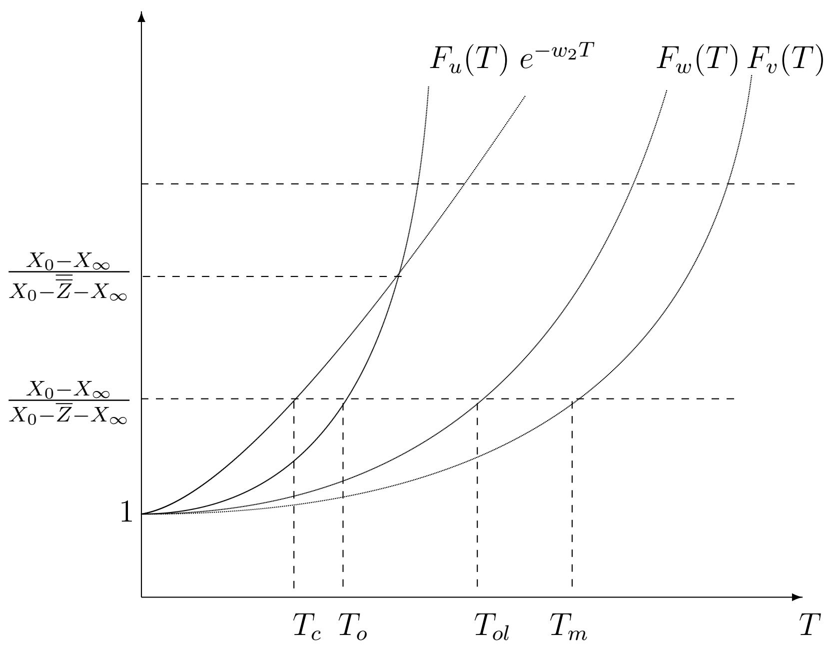

Figure II.3:

Consider now initial extraction in the MPNE. We have from (II.51)

$$x_0^m = -\alpha_1 v_1 - \alpha_2 v_2.$$

Hence, using $\alpha_1 + \alpha_2 = X_0 - \widetilde{X}$ and (II.48),

$$x_0^m = -\alpha_1 (v_1 - v_2) - v_2 \left(X_0 - \widetilde{X}\right) = v_2 \left(X_0 - \overline{Z} - \widetilde{X}\right) e^{-v_1 T_m} - v_2 \left(X_0 - \widetilde{X}\right)$$

i.e.

$$x_0^m = -v_2 \left[\left(X_0 - \widetilde{X}\right) - \left(X_0 - \overline{Z} - \widetilde{X}\right) e^{-v_1 T_m}\right]. \tag{C4}$$

Let's define

$$G_v(\overline{Z}) = -v_2 \left[\left(X_0 - \widetilde{X}\right) - \left(X_0 - \overline{Z} - \widetilde{X}\right) e^{-v_1 T_m}\right]. \tag{C5}$$

Totally differentiating (C5) yields:

$$\frac{dG_v}{d\overline{Z}} = -v_2 \left[1 + v_1 \left(X_0 - \overline{Z} - \widetilde{X}\right) \frac{dT_m}{d\overline{Z}}\right] e^{-v_1 T_m}, \tag{C6}$$

whereas totally differentiating (C1) yields:

$$-\frac{v_1 v_2}{v_1 - v_2} \left[e^{-v_2 T_m} - e^{-v_1 T_m}\right] \frac{dT_m}{d\overline{Z}} = \frac{X_0 - \widetilde{X}}{\left(X_0 - \overline{Z} - \widetilde{X}\right)^2}$$

i.e.

$$-\frac{v_1 v_2}{v_1 - v_2} \left[\frac{v_1 - v_2}{v_1} \frac{X_0 - \widetilde{X}}{X_0 - \overline{Z} - \widetilde{X}} + \left(\frac{v_2}{v_1} - 1\right) e^{-v_1 T_m}\right] \frac{dT_m}{d\overline{Z}} = \frac{X_0 - \widetilde{X}}{\left(X_0 - \overline{Z} - \widetilde{X}\right)^2}$$

i.e.

$$-v_2 \left[\left(X_0 - \widetilde{X}\right) - \left(X_0 - \overline{Z} - \widetilde{X}\right) e^{-v_1 T_m}\right] \frac{dT_m}{d\overline{Z}} = \frac{X_0 - \widetilde{X}}{X_0 - \overline{Z} - \widetilde{X}}$$

i.e.

$$\frac{dT_m}{d\overline{Z}} = \frac{1}{x_0^m} \frac{X_0 - \widetilde{X}}{X_0 - \overline{Z} - \widetilde{X}}. \tag{C7}$$

Hence

$$\frac{dG_v}{d\overline{Z}} = -v_2 \left[1 + v_1 \left(X_0 - \widetilde{X} \right) \frac{1}{x_0^m} \right] e^{-v_1 T_m} > 0.$$

When $\overline{Z} \to 0$ (extremely tight ceiling), $G_v(\overline{Z}) \to 0$. When $\overline{Z} \to X_0 - \widetilde{X}$ (non-binding ceiling), $G_v(\overline{Z}) \to -v_2 \left(X_0 - \widetilde{X} \right)$. Moreover, $\frac{dG_v}{d\overline{Z}} |_{\overline{Z} \to 0} = +\infty$. Finally, it is easy to show that $G_v(\overline{Z})$ is concave.

The same applies for $G_w(\overline{Z})$ and $G_u(\overline{Z})$, the initial extractions in the open loop and efficient equilibria.

As $G_v(\overline{Z})$, $G_w(\overline{Z})$ and $G_u(\overline{Z})$ are increasing and concave functions of $\overline{Z}$, both nil and with an infinite slope at the origin, and as $G_v(X_0 - X_\infty) < G_w(X_0 - X_\infty) < G_u(X_0 - X_\infty)$ since $-v_2 < -w_2 < -u_2$, we can conclude that $x_0^m < x_0^{ol} < x_0^o \; \forall \overline{Z} > 0$.

Let us now compare x_0^c and x_0^{ol}. From (II.85), we have:

$$x_0^c = -w_2 \left(X_0 - X_\infty \right),$$

and we deduce from (II.82):

$$x_0^{ol} = -\gamma_1 w_1 - \gamma_2 w_2 \quad \text{with } \gamma_1 + \gamma_2 = X_0 - \widetilde{X}, \; \gamma_1, \gamma_2 > 0, \; w_1 > 0, \; w_2 < 0.$$

Hence

$$x_0^{ol} = -\gamma_1 \left(w_1 - w_2 \right) - w_2 \left(X_0 - \widetilde{X} \right) = -\gamma_1 \left(w_1 - w_2 \right) + x_0^c + w_2 \frac{d}{\rho c_2} < x_0^c.$$

Let us finally compare x_0^c and x_0^o in the case where the marginal damage before the ceiling is nil. When $d = 0$, $\widetilde{X} = X_\infty$ and by analogy with (C4),

$$x_0^o = -u_2 \left[\left(X_0 - X_\infty \right) - \left(X_0 - \overline{Z} - X_\infty \right) e^{-u_1 T_o} \right].$$

x_0^c is independent on $\overline{Z}$. x_0^o is an increasing function of $\overline{Z}$. When $\overline{Z} \to 0$, $x_0^o \to 0 < x_0^c$. When $\overline{Z} \to X_0 - X_\infty$, $x_0^o \to -u_2 (X_0 - X_\infty) > x_0^c$ since $w_2 > u_2$. By continuity, this remains true for d small.

II.D Comparison of the consumers' payoff at the MPNE and the cartel without carbon tax equilibrium

The consumers' payoff at the MPNE is $V_c^m (X_0) = \frac{b}{2\rho} (x_0^m)^2$, with x_0^m given by (C4).

The consumers' payoff in the cartel without tax case is, using (II.88) and (II.85):

$$V_c^c (X_0) = \frac{b}{2\rho} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{2c_2}{\rho b}}} \left[w_2 (X_0 - X_\infty)\right]^2 \left(1 - e^{-\rho\sqrt{1+\frac{2c_2}{\rho b}}T_c}\right).$$

When $\overline{Z}$ is high, T_c is also high and $1 - e^{-\rho\sqrt{1+\frac{2c_2}{\rho b}}T_c} \sim 1$ and, from (C4), $x_0^m \sim -v_2 \left(X_0 - \widetilde{X}\right)$. Hence when $d = 0$ we have

$$\left(\frac{V_c^m (X_0)}{V_c^c (X_0)}\right)^{\frac{1}{2}} \sim \left(1 + \frac{2c_2}{\rho b}\right)^{\frac{1}{4}} \frac{v_2}{w_2} = \frac{2}{3}\left(1 + \frac{2c_2}{\rho b}\right)^{\frac{1}{4}} \frac{\sqrt{1+\frac{3c_2}{\rho b}} - 1}{\sqrt{1+\frac{2c_2}{\rho b}} - 1}.$$

Easy but tedious computations show that the right-hand side member of this equation is always greater than 1: it is an increasing function of $\frac{c_2}{\rho b}$, and for $\frac{c_2}{\rho b} \sim 0$, it is equivalent to $1+\frac{c_2}{\rho b} > 1$. Hence for $\overline{Z}$ high enough and $d = 0$, $V_c^m (X_0) > V_c^c (X_0)$.

When $\overline{Z}$ is small, T_c and T_m are also small, and we have

$$\begin{aligned} V_c^c (X_0) &\sim \frac{b}{2\rho} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{2c_2}{\rho b}}} \left[w_2 (X_0 - X_\infty)\right]^2 \rho\sqrt{1+\frac{2c_2}{\rho b}}T_c \\ V_c^m (X_0) &\sim \frac{b}{2\rho} \left[v_2 (X_0 - X_\infty)\right]^2 (v_1 T_m)^2, \end{aligned}$$

hence

$$\left(\frac{V_c^m\left(X_0\right)}{V_c^c\left(X_0\right)}\right)^{\frac{1}{2}} \sim \left(\frac{v_2}{w_2}\right)^2 \frac{\left(v_1 T_m\right)^2}{\rho T_c} \sim 0.$$

For $\overline{Z}$ small enough and $d = 0$, $V_c^m\left(X_0\right) < V_c^c\left(X_0\right)$.

II.E MPNE: dynamic programming

Producers

The Hamilton–Jacobi–Bellman equation is:

$$\begin{aligned}\rho V_p^m(X) &= \max_p \left\{(p - c(X))\, x(p + \theta(X)) + \frac{dV_p^m(X)}{dt}\right\} \\ &= \max_p \left\{\left(p - c(X) - V_p^{m\prime}(X)\right) x(p + \theta(X))\right\}.\end{aligned}$$

Maximization on the right-hand side yields:

$$x(p + \theta(X)) + \left(p - c(X) - V_p^{m\prime}(X)\right) x'(p + \theta(X)) = 0.$$

Hence the producers' price strategy:

$$p = c(X) - \frac{x(p + \theta(X))}{x'(p + \theta(X))} + V_p^{m\prime}(X).$$

The maximized H–J–B equation reads:

$$\rho V_p^m(X) = -\frac{x^2}{x'}.$$

Computing the derivative with respect to X_t and using the envelope theorem yields:

$$\begin{aligned}\rho V_p^{m\prime}(X) &= \left(-c'(X) - V_p^{m\prime\prime}(X)\right) x + \left(p - c(X) - V_p^{m\prime}(X)\right) x'\theta'(X) \\ &= -\left(c'(X) + \theta'(X) + V_p^{m\prime\prime}(X)\right) x.\end{aligned}$$

Hence the equation giving the evolution of the marginal value of the resource stock for the producers:

$$V_p^{m\prime\prime}(X)x = -\rho V_p^{m\prime}(X) - (c'(X) + \theta'(X))\, x$$

i.e.

$$\frac{dV_p^{m\prime}(X)}{dt} = \rho V_p^{m\prime}(X) + (c'(X) + \theta'(X))\, x.$$

Consumers

The H–J–B equation before the ceiling is:

$$\begin{aligned}\rho V_c^m(X) &= \max_{\theta} \left\{ u(x) - p(X)x + \frac{dV_c^m(X)}{dt} - D(X) \right\} \\ &= \max_{\theta} \left\{ u(x) - (p(X) + V_c^{m\prime}(X))\, x - D(X) \right\}.\end{aligned}$$

Maximization on the right-hand side yields:

$$u'(x) = p(X) + V_c^{m\prime}(X).$$

Hence the consumers' tax strategy:

$$\theta = V_c^{m\prime}(X).$$

The maximized H–J–B equation reads:

$$\rho V_c^m(X) = u(x) - u'(x)x - D(X).$$

Computing the derivative with respect to X_t and using the envelope theorem yields:

$$\begin{aligned}\rho V_c^{m\prime}(X) &= u'(x)x' - \left(p(X) + V_c^{m\prime}(X)\right)x' - \left(p'(X) + V_c^{m\prime\prime}(X)\right)x - D'(X)\\ &= -\left(p'(X) + V_c^{m\prime\prime}(X)\right)x - D'(X).\end{aligned}$$

Hence the evolution of the marginal value of the resource stock for consumers:

$$V_c^{m\prime\prime}(X)x = -\rho V_c^{m\prime}(X) - p'(X)x - D'(X)$$

i.e.

$$\frac{dV_c^{m\prime}(X)}{dt} = \rho V_c^{m\prime}(X) + p'(X)x + D'(X).$$

MPNE

Strategies before the ceiling are:

$$\begin{aligned}p &= c(X) - \frac{x(p+\theta)}{x'(p+\theta)} + V_p^{m\prime}(X)\\ \theta &= V_c^{m\prime}(X),\end{aligned}$$

and so the equilibrium is characterized by:

$$u'(x) = p + \theta = c(X) - \frac{x(p+\theta)}{x'(p+\theta)} + V_p^{m\prime}(X) + V_c^{m\prime}(X).$$

Define

$$\Phi(X) = c(X) + V_c^{m\prime}(X) + V_p^{m\prime}(X) + \frac{D'(X)}{\rho}.$$

The equilibrium equation then reads:

$$u'(x) = p + \theta = \Phi(X) - \frac{D'(X)}{\rho} - \frac{x(p+\theta)}{x'(p+\theta)},$$

i.e., with the quadratic specification for the utility function and the linear specification of the damage function:

$$a - bx = p + \theta = \Phi(X) + a + \frac{d}{\rho} - (p + \theta) \Rightarrow \begin{cases} p + \theta = \frac{1}{2}\left(\Phi(X) + a + \frac{d}{\rho}\right) \\ x = \frac{1}{2b}\left(a - \frac{d}{\rho} - \Phi(X)\right). \end{cases}$$

The FOC, the maximized H–J–B equations and the equations of evolution of the marginal value of the stock read:

$$\begin{aligned} p &= c(X) + a - (p + \theta) + V_p^{m\prime}(X) \\ \theta &= V_c^{m\prime} \\ \rho V_p^m(X) &= bx^2 = \frac{1}{4b}\left(a - \frac{d}{\rho} - \Phi(X)\right)^2 \\ \rho V_c^m(X) &= \frac{b}{2}x^2 - d(X_0 - X) = \frac{1}{8b}\left(a - \frac{d}{\rho} - \Phi(X)\right)^2 - d(X_0 - X) \\ \left(V_p^{m\prime\prime}(X) + c'(X) + \theta'(X)\right)x &= -\rho V_p^{m\prime}(X) \\ \left(V_c^{m\prime\prime}(X) + p'(X)\right)x - d &= -\rho V_c^{m\prime}(X). \end{aligned}$$

The sum of the maximized H–J–B equations yields:

$$\rho\left(V_p^m(X) + V_c^m(X)\right) = \frac{3}{8b}\left(a - \frac{d}{\rho} - \Phi(X)\right)^2 - d(X_0 - X),$$

while the sum of the equations of evolution of the marginal value of the stock reads:

$$\left(\Phi'(X) + p'(X) + \theta'(X)\right)x - d = -\rho\left(\Phi(X) - c(X) + \frac{d}{\rho}\right)$$

i.e.

$$\left(\Phi'(X) + \frac{1}{2}\Phi'(X)\right)\frac{1}{2b}\left(a - \frac{d}{\rho} - \Phi(X)\right) - d = -\rho\left(\Phi(X) - c(X) + \frac{d}{\rho}\right)$$

i.e.

$$\Phi'(X) = \frac{4\rho b}{3}\frac{\Phi(X) - c(X)}{\Phi(X) - \left(a - \frac{d}{\rho}\right)}.$$

Chapter III

Transfer against carbon tax: a solution for a worldwide carbon tax?

1 Introduction

To fight the environmental damage created by GHG emissions due to fossile fuel consumption, the world has begun, though with difficulty, to take action. Several summits have been organized: Kyoto, Copenhagen, Cancun and recently Durban. Targets have been assigned. However, they are not compelling enough, many countries being opposed to stringent measures as they fear these would slow their growth. Furthermore many emergent countries claim that they are not responsible for past emissions and therefore demand that old rich countries finance their efforts to limit climate change. The USA take argument of this stance to turn down proposals that would imply some commitment for them.

Though, some areas, especially Europe, have implemented concrete measures. The EU has built an european pollution rights market for big polluting industrial plants. Some EU countries have put in place a national carbon tax for household final fossile fuel consumption. The problem remains that the main polluting countries, the USA and China, drag their feet.

It's sure, though, that the solution must be worldwide and not ony regional. One way to limit the future temperature rise due to the increase of greenhouse gas concentration would be to set up a worldwide carbon tax: it's the problem we are interested in here.

As many poor and emergent countries cannot or don't want to finance the climate policy, experts have come up with the idea of a transfer from old rich countries to finance the climate policy of poor and emergent countries. Fairness can support this idea at least for poor countries, especially in Africa. For emergent countries, some of them becoming richer, it can be discussed. However three reasons can be put forward: firstly, old rich countries have a true historic responsibility in the accumulation of GHG in the atmosphere during the the last two centuries, secondly the cost of an active climate policy for emergent countries is proportionally stronger for them than for OECD countries as their level of wealth remains still lower, thirdly it is the interest of every one, rich countries included, that the temperature rise can be kept under control.

At the theoretical level, in the context of dynamic games, many papers have concentrated on the two areas model, studying the dynamic interactions between fossil suppliers and one area of consumers, both being cartelized. The seminal works for feedback Nash equilibrums were those of Wirl. In 1994, he showed in a different context (in fact that of a government that taxes energy carriers for pigouvian motives) that linear strategies are superior to non linear (Wirl (1994)). Then in 1995, he laid out a dynamic game between cartelized suppliers and a consumers' government (Wirl (1995)), looking at the two state variables case[1] and the one state variable case. The latter, which is the only one to have a closed - form solution, is characterized by the preemption of the tax at the wellhead. In the same year, Wirl and Dockner added the idea of a Leviathan state that appreciates tax revenues as such (Wirl and Dockner (1995)); consumers can benefit from it as this form of government can appropriate some of the producers' rent by deterring preemption to some extent. They showed also in this paper that, in the case of a resource

[1] In this case the two state variables are the cumulative energy production X and the CO_2 concentration S. If the depreciation parameter of the CO_2 concentration δ is different from zero, the two stocks are different: $\dot{S} = \dot{X} - \delta S$.

binding constraint, non linear strategies are the only feasible ones. In 2004, Liski and Tahvonen compared the Nash equilibrium not only with the efficient one but also with the practical reference, that is the monopoly situation of the producers with passive consumers (Liski and Tahvonen (2004)). Using the traditional definition of a Pigouvian tax, they proved that in the MPNE the carbon tax can shift more rents from the monopoly than the pure compensation of pollution costs for Pigouvian motives. Very importantly, they showed that the buyers increase their payoff in the MPNE, as compared to their payoff in the passive case, confirming that a strategic attitude of the consumers can allow them to take some monopoly rent from the producers. Recently, Dullieux *et al.* (2011) dealt with a two areas game in which the oil - importing countries seek to maintain the atmospheric carbon concentration under a given ceiling; implicit feedback rules and explicit non linear time - paths of extraction are obtained.

Another trend is that of Feedback Stackelberg games, where an advantage is given to one of the players. Tahvonen (1996) studied the case where the sellers cartel acts as the Stackelberg leader. Rubio and Escriche (2001) proved that the case put forward by Tahvonen gives the same equilibrium as the MPNE, but that if the buyers are the leader, these see their payoff increasing in this equilibrium compared to the MPNE. All of these papers use the stagewise Stackelberg concept: the leader commits to an action at each stage of the game, knowing the reaction function of the follower. Time consistency is thus assured[2].

This paper keeps this framework of dynamic interactivity but investigates this idea of two areas of consuming countries, one that agrees to set up a carbon tax and to finance the effort of the other consuming area by transferring a fraction of the product of its carbon tax, the other implementing the same carbon tax as it gets a transfer from the other area. With the area of producers, it makes a model

[2] Some authors use another concept: that of global Stackelberg game. In this type of game, the leader is commited to a decision rule from the start of the game. To ensure time - consistency, the set of decision rules from which a choice can be made is restricted in such a way that the same decision rule will be chosen by the leader at any date and state. See for instance Fujiwara and Long (2010).

with three areas. Note that this framework is different fom that used recently by Karp *et al.* (2011). They also come up with the idea of a third and passive area but they assume that this third area ("the fringe") is a price taker that does not set up a carbon tax: hence there is "carbon leakage"in the sense that the rich area can influence but not determine completely the trajectory of the pollution stock; here we choose to have a worlwide carbon tax and there is no "carbon leakage". Furthermore their main purpose is to show that in their framework with "carbon leakage" the non - competitive behaviour of the rich importers and producers creates welfare losses for the" fringe". Here we would like to show that the setting up of a worlwide carbon tax in a dynamic framework where producers and the rich area fight against each other could create in some circumstances welfare opportunities for the poor and emergent area. They also deal with quotas and prices tools, while this paper is focused on the use of price tools in the game.

There are simplifications for the game to be tractable: producers are supposed not to consume oil, the second area is supposed to agree with the level of carbon tax resulting of the interaction of the two other areas, for a given rate of transfer.

The rate of transfer is exogenous, but it's assumed that the poor and emergent area can observe its payoff resulting from the choice of a given rate of transfer and can strike a deal with the rich area for a particular rate of transfer because it's the more appropriate to its welfare. It's also assumed that the rich area then agrees with this particular rate of transfer if it exists.

Both the MPNE and the Feedback Stackelberg cases are solved and studied, linear quadratic functions being used to have tractable solutions. The objective is to see in both situations if the area of emergent or poor countries can have an interest to strike a deal with the other area of consumers (carbon tax against transfer), which could improve its welfare. More precisely it's looked for an optimal rate that would maximize the area of poor and emergent countries as compared to all other rates of tranfer and that would also increase its payoff versus a situation without transfer and carbon tax considered as a reference case (in other words this reference case is the situation of passive consuming areas in front of the producers cartel; Liski and Tahvonen (2004) used this situation as the realistic reference, as they thought it as the nearest to the real world[3]).

The first conclusion is that there no economic solution if the rate of transfer is greater than $\frac{1}{2}$ in the MPNE and than $\frac{3}{4}$ in the Stackelberg equilibrium.

The second conclusion is that the Stackelberg solution where the rich consumers are the leader delivers what intuition suggests (and that to some extent it can also be the case for the MPNE): at least for a range of values of environmental damage and for a minimum proportion of financing countries, there is a positive value of the rate of transfer that maximizes the payoff of the poor and emergent countries. The reason is that during a range of values, if the rate of transfer of the carbon tax increases, the dynamic of the total transfer can more than offset the restrictive effect on both areas oil consumption due to the higher burden borne by the rich countries. However for the MPNE it requires a large number of financing countries versus the non financing ones, while for the Stackelberg solution it is the case with less numerous financing countries. The Stackelberg solution seems therefore easier to implement. Hence it is more likely that in this case the poor and emergent countries can strike a deal with the old rich ones consisting in the setting up of a carbon tax against financial transfer.

Thirdly, another interest of the model is to show non traditional results relative to the carbon tax ; for instance, as the rate of transfer increases, it is necessary for the rich country to decrease the initial carbon tax and thus to bring down the

[3] The idea of a "brown" government for the poor and emergent countries as a reference case is clearly ruled out here. It has been argued, indeed, that these countries, though they do not take into account the environmental damage, would benefit from setting up tariffs. Hence this "brown" case could be the right reference case.
On the theoretical level, Chou and Long (2009) proved that consuming areas can benefit from a tariff, though they use a model without environmental damage even for the rich old countries and compare the tariff case with the case of competitive producers and not with the case of the producers' cartel that we consider here.
However, the main argument not to use the "brown" reference is the fact that the real world in the emergent and poor country is globally very far from this "brown" framework: many of these countries subsidize oil consumption for economic or social reasons and many others put up low taxes that are in no way optimal tariffs.

strategic pressure on the producers because of the higher external burden of the transfer; and in some configurations the evolution with time of the carbon tax can be influenced by the level of the rate of transfer.

The model shows also that, if damage is "small", the old rich countries are better off in the equilibrium (MPNE or Stackelberg) relative to the value of the optimal rate of transfer (that which maximizes the payoff of the poor and emergent countries area) than in the reference case of the passive consumers in front of the cartelized producers. This is a strong argument in favor of a strategic attitude of these countries versus the producers as it allows them to agree with a positive transfer to the poor and emergent countries without becoming poorer.

2 The model

There are two groups of consumer countries. The first one sets up a common regulator and implements a common carbon tax to reduce GHG emissions. The second group of countries would not spontaneously have a policy of limitation of GHG, because they think that they are too poor to do it and do not want to limit their growth by an environmental policy.

Call A the second group of countries and B the first one: a reference to Copenhaguen annex. All countries are identical. There are n B countries and $1-n$ A countries[4]. Typically, in calculus and simulations, $n = 0.4$ and $n = 0.7$ are used.

B countries are alive to the position of A countries. They agree to transfer to area A a fraction α of the whole product of the carbon tax in their area and ask in exchange the area A to set up the same carbon tax as theirs. The transfer puts a pressure on area B payoff but the introduction of a carbon tax in area A can limit the environmental damage and thus have a favorable effect on area B welfare. It's

[4] The results of the paper would be identical if assuming the total number of countries to be N, that of area B to be nN and that of area A to be $(1-n)N$.
Indeed, if oil consumption is x and if marginal utility of oil consumption for each country is linear (that is $u^{'}(x) = a - bx$), the Bellman equations of the problem are identical either we have $(N = 1, b)$ or $(N \neq 1, Nb)$.
In fact it's more convenient to keep $N = 1$ and b.

assumed that $0 \leq \alpha \leq 1$. If $\alpha = 0$, there is no transfer but area A agrees however to set up a carbon tax: this situation[5] can seem unlikely.

Each A country then receives the transfer $\frac{n}{1-n}\theta x$, if x is the oil consumption of each country of area B and θ the carbon tax.

Area A acts as one body: every country of the area sets up the carbon tax proposed by the common regulator of the area B to the common regulator of area A.

For a given rate of transfer, the level of the carbon tax will be determined at each date by the game between area B and oil producers.

Area A is not completely passive: it is assumed that it will strike a deal with area B only for a rate of transfer that maximizes its payoff as compared to all other rates of transfer and that increases its payoff versus a situation without transfer and carbon tax.

Note also it is assumed that area A does not play any game and hence that it cannot have any stance that could allow him to benefit from time inconsistency; more precisely it's assumed that, if it gives on $t = 0$ its agreement on the deal because of the payoff it implies on the whole horizon, it cannot renege on this commitment. Economically, this commitment can be sustained: firstly area A knows when striking a deal that it will win in this deal compared to the passive situation in front of the cartel, secondly it can expect that, if it breaks unilateraly the deal, B would not strike a new deal [6] and A could not do anything as it's assumed not to play any game, thirdly A and B do not play against each other and we can therefore think of a climate of confidence between them in our scheme that prevents A from deviating from the deal.

[5] This situation is different from the case where area B sets up a carbon tax and makes no transfer, and area A does not put in place a carbon tax: this case has no solution in our framework, as seen later.

[6] We rule out the possibility that A could hope that B would agree to strike a new deal if A has broken the first one in t. Indeed we can assume that A thinks such an attitude for B is very unlikely because it knows that B is benevolent but not stupid. A makes the following reasoning: If B stroke a new deal it could not prevent area A to break it again later and it would know that this break - up would be likely: hence B would be very reluctant to strike a new deal.

The transfer from B to A is only $\alpha n\theta x$. Hence $(1-\alpha)\,n\theta x$ is redistributed by area B regulator to its consumers in lump - sum dotations.

As far as oil consumption is concerned, the utility function is assumed to be concave and quadratic:

$$u\,(x) = ax - \frac{b}{2}x^2, \quad a > 0, \quad b > 0. \tag{III.1}$$

The initial resource stock is X_0, the stock still in the ground at date t is X_t. Natural carbon absorption is nil, so that the atmospheric carbon concentration at date t is strictly equal to the stock yet extracted and burnt at this date, $X_0 - X_t$.

The environmental externality is supposed to be quadratic, $d\,(X_0 - X_t)^2$. It's assumed that area B bears a fraction n of this damage, that is $nd\,(X_0 - X_t)^2$. This assumption implies that the B regulator cares only about consumers' welfare of this area, though it is interested in buying the cooperation of countries of area A by the deal" transfer against carbon tax" and though it can manipulate the demand of oil by countries of area A with the objective of increasing the welfare enjoyed by the consumers living in countries of area B through a reduction of environmental damages. It's also assumed that area A does not take into account the environmental damage when working out its payoff. This is well suited to a case where area A does not chose the level its carbon tax.

For the representative consumer:

$$u'(x) = p + \theta, \tag{III.2}$$

where p is the producer price and θ the carbon tax.

The area B regulator maximizes on the whole horizon the discounted net surplus. The net surplus at each date is equal to the consumers' utility less the amount paid to the producers, less the transfer to area A and the environmental damage. As the tax revenues are partially reimbursed as lump-sum transfers to consumers, this part, $n\,(1-\alpha)\,\theta x$, does not appear into the net surplus.

Producers face a unit extraction cost depending on the resource stock still in the ground. The smaller this stock, the higher the marginal extraction cost:

$$c\left(X\right) = c_1 - c_2 X, \quad c_1 > 0, \quad c_2 > 0, \quad X_0 > \frac{c_1 - a}{c_2}. \tag{III.3}$$

It's assumed that initial extraction is profitable: $c(X_0) < u'(0)$

Here, scarcity is economic, in the sense that the marginal cost of extraction of the last drop of oil can be higher than the choke price a. It's therefore assumed that:

$$c(0) > u'(0) \Leftrightarrow c_1 > a. \tag{III.4}$$

Then the last drop will never be extracted. Producers will stop extraction before and leave some oil in the soil. Without any environmental constraint, they would leave in the ground a stock X_∞ defined by:

$$c(X_\infty) = u'(0) \Leftrightarrow X_\infty = \frac{c_1 - a}{c_2}. \tag{III.5}$$

It's assumed that producers do not intend to adopt any climate policy, but are perfectly aware that area B does.

In area A, the preferences are the same as in area B. If y is oil consumption in area A:

$$u'(y) = p + \theta \tag{III.6}$$

$$\Rightarrow y = x \tag{III.7}$$

$$\Rightarrow \dot{X} = -x \tag{III.8}$$

It is assumed that in area A the product of the carbon tax is redistributed in lump - sum transfers to consumers.

3 A MPNE with three areas

Area B and producers play simultaneously a differential game. A Markov solution is looked for.

3.1 Producers

The producers maximize their profit on the whole horizon, taking into account the scarcity of oil:

$$\begin{aligned} & \max_p \int_0^\infty [p - c(X)]x(p + \theta(X))e^{-\rho t}dt && \text{(III.9)} \\ st \quad : \quad & \dot{X} = -x \\ X(0) \quad = \quad & X_0 \end{aligned}$$

The Bellman equation is:

$$\rho V_p^T(X) = \max_p \left\{ \left(p - c(X) - V_p^{T\prime}(X)\right) x(p + \theta(X)) \right\} \tag{III.10}$$

The letter T is to remind us that here the MPNE is worked out with a transfer from B to A.

The FOC reads:

$$x(p + \theta(X)) + \left(p - c(X) - V_p^{T\prime}(X)\right) x'(p + \theta(X)) = 0. \tag{III.11}$$

Hence the producers' price strategy:

$$p = c(X) + bx + V_p^{T\prime}(X) \tag{III.12}$$

Let's remind us that $-\frac{x}{x'} = bx$.

Using this price equation, the maximized Bellman equation reads:

$$\rho V_p^T(X) = bx^2. \tag{III.13}$$

3.2 Consumers

The net surplus can read:

$$nu(x\left(p(X)+\theta\right)) - n(p(X)+\alpha\theta)x\left(p(X)+\theta\right) - nd\left(X_0 - X\right)^2 \tag{III.14}$$

Hence the problem of the regulator of the area B is:

$$\begin{aligned} & \max_{\theta} \int_0^{\infty} [nu(x\left(p(X)+\theta\right)) - n(p(X)+\alpha\theta)x\left(p(X)+\theta\right)]e^{-\rho t}dt \\ & - \int_0^{\infty} nd\left(X_0 - X\right)^2 e^{-\rho t}dt \qquad \text{(III.15)} \\ st \quad : \quad & \dot{X} = -x \\ X\left(0\right) \quad = \quad & X_0 \end{aligned}$$

The Bellman equation is:

$$\rho V_B^T(X) = \max_{\theta} \left\{ \begin{array}{c} nu(x\left(p(X)+\theta\right)) - n(p(X)+\alpha\theta)x\left(p(X)+\theta\right) \\ -nd\left(X_0 - X\right)^2 - x\left(p(X)+\theta\right)V_B^{T,}(X) \end{array} \right\} \tag{III.16}$$

The FOC reads:

$$nx^{'}\left(u^{'} - p - \alpha\theta\right) - x^{'}V_B^{T\prime}(X) - nx\alpha = 0 \tag{III.17}$$

However:

$$u^{'} - p - \alpha\theta \quad = \quad \left(1-\alpha\right)\theta \tag{III.18}$$

$$\text{and } x^{'} \quad = \quad -\frac{1}{b} \tag{III.19}$$

Hence:

$$V_B^{T\prime}(X) = n\left[(1-\alpha)\,\theta + \alpha b x\right] \tag{III.20}$$

Note that a negative carbon tax cannot be a priori excluded. It would be the case if:

$$\frac{V_B^{T\prime}(X)}{n\,(1-\alpha)} - \frac{\alpha b x}{(1-\alpha)} < 0 \tag{III.21}$$

$V_B^{T\prime}(X)$ is the marginal cost of the stock of pollution for area B. Hence $V_B^{T\prime}(X) > 0$. It can be written[7]:

$$\theta = \frac{1}{n\,(1-\alpha)}\left(V_B^{T\prime}(X) - n\alpha b x\right) \tag{III.22}$$

The effect of the rate of transfer on the level of the carbon tax is a priori ambiguous: on the one hand everything happens for area B as if the damage was multiplied by $\frac{1}{1-\alpha}$, which requires a higher carbon tax; on the other hand there is a negative effect through $-n\alpha b x$. The reason of this last effect is that for area B the burden from the transfer has to be somewhat compensated by a lower tax that pushes upward consumption and hence surplus. Simulation shows in fact that for the initial carbon tax the negative effect is stronger in the sense that an increase of the rate of transfer pushes downwards the initial value of the tax[8].

If no transfer[9] as in Liski and Tahvonen (2004), the carbon tax would be equal to the marginal cost of the pollution stock.

Using the above expression of θ, one gets the maximized Bellman equation:

$$\rho V_B^T(X) = nbx^2\left(\frac{1}{2} - \alpha\right) - nd\,(X_0 - X)^2$$

If x_0 is the initial oil consumption, the payoff of the game for area B is:

$$\rho V_B^T(X_0) = nbx_0^2\left(\frac{1}{2} - \alpha\right) \tag{III.23}$$

[7] Note that if $\alpha = 1$, the carbon tax is not defined: there is no technical solution in this case.
[8] See Appendix III.A.3.1.
[9] And $n = 1$

Area B does not get any positive payoff from oil consumption if $\alpha \geq \frac{1}{2}$. Indeed, if the rate of transfer is too high, the levy on area B is so important that it has no interest in consuming oil. Therefore, from an economic standpoint, all the cases with $\alpha \geq \frac{1}{2}$ can be ruled out.

3.3 The equilibrium

From the previous equations:

$$p = c(X) + bx + V_p^{T\prime}(X)$$

$$= c(X) + a - p - \theta\left(X\right) + V_p^{T\prime}(X)$$

$$\Rightarrow p = \frac{1}{2}\left[c(X) + a - \theta\left(X\right) + V_p^{T\prime}(X)\right]$$

Since:

$$x = \frac{1}{b}\left[a - p - \theta\right]$$

$$x = \frac{1}{2b}\left[a - c(X) - \theta\left(X\right) - V_p^{T\prime}(X)\right] \qquad \text{(III.24)}$$

Then, using the equation got above:

$$\theta = \frac{1}{n\left(1-\alpha\right)}\left(V_B^{T\prime}(X) - n\alpha bx\right)$$

it comes[10]:

$$x = \frac{(1-\alpha)}{b(2-3\alpha)}\left(a - c(X) - V_p^{T\prime}(X) - \frac{V_B^{T\prime}(X)}{n\left(1-\alpha\right)}\right) \qquad \text{(III.25)}$$

[10] Note that $\alpha < \frac{1}{2}$. Hence $\alpha \neq 1$ and $\alpha \neq \frac{2}{3}$

However:

$$\rho V_p^T(X) = bx^2 \tag{III.26}$$

$$\rho V_B^T(X) = nbx^2\left(\frac{1}{2}-\alpha\right) - nd\left(X_0 - X\right)^2 \tag{III.27}$$

Then it comes:

$$\rho V_p^T(X) = \frac{(1-\alpha)^2}{b(2-3\alpha)^2}\left(a - c(X) - V_p^{T\prime}(X) - \frac{V_B^{T\prime}(X)}{n\left(1-\alpha\right)}\right)^2 \tag{III.28}$$

$$\rho V_B^T(X) = n\left(\frac{1}{2}-\alpha\right)\frac{(1-\alpha)^2}{b(2-3\alpha)^2}\left(a - c(X) - V_p^{T\prime}(X) - \frac{V_B^{T\prime}(X)}{n\left(1-\alpha\right)}\right)^2 - nd\left(X_0 - X\right)^2 \tag{III.29}$$

One way of solving now the T MPNE is to use the elegant method initiated at the beginning of the nineties by Wirl[11]. One finds:

$$\tilde{X}_\infty = \frac{c_1 - a + \frac{2dX_0}{\rho(1-\alpha)}}{c_2 + \frac{2d}{\rho(1-\alpha)}} \tag{III.30}$$

It's easy to prove that $\frac{\partial \tilde{X}_\infty}{\partial \alpha} > 0$.The higher α, the more restrictive the T MPNE for total oil consumption. One can also get:

$$X = \tilde{X}_\infty + \left(X_0 - \tilde{X}_\infty\right)e^{r_2 t} \tag{III.31}$$

$$x = -r_2\left(X_0 - \tilde{X}_\infty\right)e^{r_2 t} \tag{III.32}$$

$$p + \theta = a + br_2\left(X_0 - \tilde{X}_\infty\right)e^{r_2 t} \tag{III.33}$$

$$\left(\dot{p} + \dot{\theta}\right) > 0 \tag{III.34}$$

[11] All the proofs of this paper are in the Appendix. For the solution of the MPNE see Appendix III.A.1.
The reader can also look at two sets of figures at the end of the paper that result of the simulations, one for this MPNE and one for the Stackelberg equilibrium studied later.

With r_2[12] such that:

$$r_2 = \left(\frac{\rho}{2}\right)\frac{(2-3\alpha)}{(3-4\alpha)}\left(1-\sqrt[2]{1+\frac{8}{\rho^2}(3-4\alpha)\frac{(1-\alpha)}{b(2-3\alpha)^2}\left(\frac{d}{(1-\alpha)}+\rho\frac{1}{2}c_2\right)}\right) \tag{III.35}$$

It's also possible to get the analytical solution for the carbon tax (Appendix III.A.1):

$$\theta = \left(X_0 - \tilde{X}_\infty\right)[e^{r_2 t}\left(c_2 + 2br_2 - \frac{2br_2^2}{\rho}\right) + \frac{2d}{\rho(1-\alpha)}] \tag{III.36}$$

Proposition 3.1. *As far as the carbon tax is concerned:*

- If $d > d_1$ the carbon tax is always increasing with time, its initial value being positive if $\alpha < \breve{\alpha}$ and negative if $\alpha > \breve{\alpha}$.

- If $d < d_1$ (in this case $\breve{\alpha} > \tilde{\alpha}$), when $\alpha < \tilde{\alpha}$ the carbon tax is decreasing with time but its initial value is positive and it remains always positive; when $\tilde{\alpha} < \alpha < \breve{\alpha}$ both initial value and derivative with time are positive; when $\alpha > \breve{\alpha}$ the carbon tax is increasing with time and its initial value is negative.

It implies in particular that the carbon tax is always positive if $\alpha < \breve{\alpha}$, whatever the damage.

Note d_1 is such that:

$$\frac{2b\rho}{3}\left(1-\sqrt[2]{1+\frac{6d_1}{b\rho^2}+\frac{3c_2}{b\rho}}\right) = \left(-c_2 + \frac{4d_1}{\rho}\right) \tag{III.37}$$

and $\breve{\alpha}$ and $\tilde{\alpha}$ depending on damage are such that:

$$r_{2(\breve{\alpha})} = \frac{-\rho\breve{\alpha}}{1-2\breve{\alpha}} \tag{III.38}$$

$$2br_{2(\tilde{\alpha})} = \frac{-c_2(1-2\tilde{\alpha}) + \frac{4d}{\rho}}{(1-\tilde{\alpha})} \tag{III.39}$$

Furthermore, the initial value of the carbon tax is decreasing with the rate of transfer.

12 It can be shown (Appendix III.A.2) that $\frac{\partial r_2}{\partial \alpha} < 0$ and that $\frac{\partial r_2}{\partial d} < 0$.

The proof is in the Appendix III.A.3.

The logic behind the initial value of the carbon tax is very intuitive: the higher the burden of transfer, the lesser the ability to have a strong initial carbon tax, and of course the smaller the strategic pressure put on the sellers through the initial tax. The fact that the initial carbon tax is negative when $\alpha > \breve{\alpha}$ raises the question of the relevance of the MPNE in this range of the rate of transfer as the initial transfer to area A can be negative. From an economic standpoint the case $\alpha > \breve{\alpha}$ can be ruled out as area A should not agree with a negative transfer at any date.

As far as the producer price is concerned, the developments are not essential and can be looked at in the Appendix III.A.4. Note only that the initial producer price is always increasing with the rate of transfer. The reason is that the area B regulator has to soften the pressure put on the producer as the external burden coming from the transfer to area A rises.

With contradictory trends of the evolution with the rate of transfer of the initial carbon tax and of the initial producer price the question is to understand what's happening with the initial oil consumption:

Proposition 3.2. *For "small" damage, initial oil consumption is increasing with the rate of transfer on the whole range* $0 - \frac{1}{2}$*. For more "severe" damage, initial oil consumption woud be decreasing for small and intermediate values of the rate of transfer and increasing with it when it is near* $\frac{1}{2}$*.*

The proof is in Appendix III.A.5. It partially requires simulation. We use the same values of parameters as those used by Liski and Tahvonen (2004) to make comparisons of results easy. Of course there are new parameters that are the rate of transfer and the number of area B countries. For our parameters the limit between "small" damage and "severe" damage is roughly $d \sim 0.02$.

When the rate of transfer is near $\frac{1}{2}$, initial oil consumption is always increasing with the rate of transfer: in this range, the carbon tax has to be pushed down strongly to somewhat offset the increase of the external burden.

For "small" damage, initial oil consumption is increasing with the rate of transfer on the whole range $0 - \frac{1}{2}$: the negative effect of an increase of the rate of transfer on the carbon tax is higher than the positive effect on the producer price, confirming the necessity for area B to soften its policy against climate change as this rate increases.

For more "severe" damage, initial oil consumption woud be decreasing for small and intermediate values of the rate of transfer and increasing with it when it is near $\frac{1}{2}$. The interpretation for the range far from $\frac{1}{2}$ is that, when the rate of transfer increases, the tendency (coming from the higher external burden) to push down the initial carbon tax is somewhat weakened by the necessity to have a high initial carbon tax to fight the environmental damage. However this is no longer possible when the rate of transfer gets nearer $\frac{1}{2}$, as the external burden is so high that environmental motives become secondary.

3.4 Payoffs

3.4.1 Area B payoff

From previous equations:

$$\rho V_B^T(X_0) = nb(x_0^2)_T(\frac{1}{2} - \alpha) \tag{III.40}$$

When $\alpha \to \frac{1}{2}$ this payoff tends to zero. It can be shown that when $\alpha > \frac{1}{3}$ it is decreasing with α (Appendix III.A.6). In fact simulation confirms that this payoff is always decreasing with the rate of transfer, whatever the rate of transfer and the damage. The higher external burden cannot be offset in any case by the strategy played against the producers.

We also have to compare the payoff of area B in the T MPNE with a reference situation. The case where area B would set up a carbon tax and area A would not must not be chosen as a reference case as it cannot happen in our framework. Indeed it would require the final carbon tax to be nil, but this is impossible as the marginal cost of pollution at this final date cannot be nil (at the final date the carbon tax must be proportionnal to the marginal cost of pollution since there is no longer any consumption)[13]. Secondly, as discussed before, the producers' cartel case with passive consumers seems the only possibility as far as a reference case is looked for.

With these assumptions, let's look at the cartel case; there is no carbon tax:

$$\begin{aligned} p_c &= a - bx_c \\ x_c &= -u_2 \left(X_0 - X_\infty\right) e^{u_2 t} && \text{(III.41)} \\ X_\infty &= \frac{c_1 - a}{c_2} && \text{(III.42)} \end{aligned}$$

$$u_2 = \frac{\rho}{2}\left(1 - \sqrt[2]{1 + \frac{2c_2}{b\rho}}\right) \quad \text{(III.43)}$$

The HJB equation cannot be used and a direct calculus is needed.

$$V_B^c\left(X_0\right) = n\int_0^\infty \frac{b}{2} x_c^2 e^{-\rho t} dt - n\int_0^\infty d\left(X_c - X_0\right)^2 e^{-\rho t} dt \quad \text{(III.44)}$$

---

[13] When area B sets up a carbon tax and area A does not:

$$\tilde{\theta}_\infty = \frac{V_B^{T'}\left(\tilde{X}_\infty\right)}{n}$$

since $\alpha = 0$. However, there is no carbon tax in area A:

$$\tilde{p}_\infty = a - bx_\infty = a$$

In area B:

$$\begin{aligned} \tilde{p}_\infty &= a - bx_\infty - \tilde{\theta}_\infty \Rightarrow -\tilde{\theta}_\infty = 0 \\ &\Rightarrow V_B^{T'}\left(\tilde{X}_\infty\right) = 0 \end{aligned}$$

However, the derivative of the Bellman equation in area B leads to:

$$\rho V_B^{T'}\left(\tilde{X}_\infty\right) = 2nd\left[X_0 - \tilde{X}_\infty\right] \neq 0$$

Hence a contradiction and no solution in this framework.
Of course there is a technical solution when area B sets up a carbon tax but makes no transfer and when area A agrees to put in place this carbon tax without any transfer, but from an economic standpoint a behaviour of this kind from area A seems unlikely.

Hence:

$$V_B^c(X_0) = n\left(\frac{a - c_1 + c_2 X_0}{c_2}\right)^2 \left(\frac{b}{2}\frac{u_2^2}{\rho - 2u_2} - d\left(\frac{1}{\rho - 2u_2} - \frac{2}{\rho - u_2} + \frac{1}{\rho}\right)\right) \tag{III.45}$$

This payoff decreases with damage and becomes negative when damage is superior to a certain value of damage that does not depend on the number of financing countries (with our parameters it happens when $d \sim 0.0065$). As $V_B^T(X_0)$ is always positive (for $\alpha \leq \frac{1}{2}$), beyond this value of damage, whatever the rate of transfer ($\leq \frac{1}{2}$):

$$V_B^T(X_0)[\alpha] > 0 > V_B^c(X_0) \tag{III.46}$$

However, if damage is very "small" and if the number of financing countries is around 0.4, we have for every rate of transfer: $V_B^T(X_0) < V_B^c(X_0)$. Typically it happens for $d \sim 0.001$. When $n = 0.4$, it's only for greater values of damage that if the rate of transfer is low ($\alpha < \grave{\alpha}$) $V_B^T(X_0) > V_B^c(X_0)$. For instance for $d = 0.006$: $\grave{\alpha} \sim 0.48$. On the contrary, when the number of financing countries is around 0.7 or above, for all values of damage, if the rate of transfer is low ($\alpha < \grave{\alpha}$) $V_B^T(X_0) > V_B^c(X_0)$.

All this makes the $n = 0.7$ case a better case than the $n = 0.4$ case.

3.4.2 Producers' payoff

From previous equations:

$$\rho V_P^T(X_0) = b r_2^2 \left(X_0 - \tilde{X}_\infty\right)^2 = b x_T^2(0) \tag{III.47}$$

The evolution of this payoff with the rate of transfer is the same as that described earlier for the initial oil consumption. In case of "small" damage, producers see their payoff increasing with the rate of transfer, because area B has to bring down its strategic pressure on producers in answer to the higher external burden it bears.

3.4.3 Area A payoff

The question is to know if area A is likely to have some gain in terms of payoff with the deal with area B. Indeed, its oil consumption is reduced by the introduction of the carbon tax and it is not sure that the compensation from area B is sufficient to offset the decrease of utility coming from less oil consumption. Note that:

- Firstly, the regulator of area A does not take into account the environmental damage in the T MPNE or in any reference case;

- Secondly the product of area A carbon tax is assumed to be redistributed in lump-sum transfers to consumers;

- Thirdly, the reference case is the producers' cartel case with passive consumers.

For area A, the HJB equation cannot be used and one way is to work out directly the payoff :

$$V_A^T(X_0) = (1-n)\int_0^\infty \left(u(x_T) - p_T x_T\right) e^{-\rho t} dt + \int_0^\infty \alpha n \theta_T x_T e^{-\rho t} dt \qquad \text{(III.48)}$$

The first term is the utility got from oil consumption, the second term is the discounted total transfer from B area. After some calculus (Appendix III.A.7) it comes:

$$\begin{aligned} V_A^T(X_0) &= (1-n)\frac{b}{2}\frac{r_2^2\left(X_0-\tilde{X}_\infty\right)^2}{\rho-2r_2} \\ &\quad -(\alpha n+1-n)\, r_2\left(X_0-\tilde{X}_\infty\right)^2\left[\frac{2d}{\rho(1-\alpha)(\rho-r_2)}+\frac{c_2+2br_2-2br_2^2\left(\frac{1}{\rho}\right)}{(\rho-2r_2)}\right] \end{aligned} \qquad \text{(III.49)}$$

Proposition 3.3. *If damage is "small" and if the number of financing countries is greater than 0.7, then there is a positive value of the rate of transfer and hence a MPNE that maximizes the payoff of area A as compared with all the other MPNE and as compared with the reference case of the passive consumers in front the cartelized producers. With this value of the rate of transfer, the payoff of area B is also greater* *than that of the reference case.*

- Calculus shows (see Appendix III.A.7) that when the number of financing countries is greater than 0.7 this payoff is increasing with the rate of transfer when this one is zero or near it and when damage is zero or near it. As calculus shows also that, when damage is zero or near it, the payoff is negative when the rate of transfer is $\frac{1}{2}$, it comes that there is a positive value of the rate of transfer between 0 and $\frac{1}{2}$ that maximizes this payoff. For our values of parameters, simulation confirms and extends this result: it is true for $n = 0.7$ and for values of parameters around those used by Liski and Tahvonen (2004) that the payoff is increasing with the rate of transfer at the beginning, when damage is inferior to a limit value (with our parameters $d \sim 0.03$).

- On the contrary, for $n = 0.4$, numerical simulation with our value of parameters shows that this payoff is always decreasing with the rate of transfer, though the decreasing is very slow at the beginning. The reason is that oil consumption is stifled in both consuming areas by the increasing external burden borne by area B and as the value of the transfer depends directly on the number of financing countries the variation of the transfer cannot completely offset this effect for area A if the number of financing countries is not enough, though it's nearly the case for small rates of transfer. It confirms that the MPNE with $n = 0.4$ is a poor case. These findings make the more interesting the case of the feedback Stackelberg strategy. We can hope that, even in the case where there are fewer financing countries, the strategic advantage of area B versus the producers in this strategy can improve the carbon tax as compared to its level in the MPNE and then improve $\int_0^\infty \alpha n \theta_T x_T e^{-\rho t} dt$, which could perhaps make the area A payoff increase with the rate of transfer at least for a range of values.

- The second term, that is the total discounted transfer, is surely positive if $\alpha < \check{\alpha}$, since in this case the carbon tax is always positive. From the area A standpoint this range of rate is the only one to consider. Simulation shows that in cases where there is a maximum for the payoff, it is for a rate of transfer which is inferior to $\check{\alpha}$, which confirms the interest of this maximum for area A.

- The sign of the derivative is not sufficient to assess the interest of the MPNE as far as the payoff is concerned: we have to compare it to the reference case of the producers' cartel with passive consumers. The situation where the number of financing countries is not sufficient can be let aside and it is possible to limit from now on focus[14] to the situation where the number of financing countries is sufficient (typically $n = 0.7$ or more). Note that:

$$V_A^c\left(X_0\right) = (1-n)\left(\frac{a - c_1 + c_2 X_0}{c_2}\right)^2 \left(\frac{b}{2}\frac{u_2^2}{\rho - 2u_2}\right) \tag{III.50}$$

This payoff does not depend on damage. On the contrary, $V_A^T\left(X_0\right)[\alpha]$ depends on damage and on the rate of transfer. Let's call $\vec{\alpha}_T\left(d\right)$ the rate of transfer where $V_A^T\left(X_0\right)[\alpha]$ is maximum. Simulation indicates that there are two different cases:

  - if damage is higher than a limit value (with our numerical parameters $d >\sim 0.03$), $V_A^c\left(X_0\right) > V_A^T\left(X_0\right)[\vec{\alpha}_T\left(d\right)]$; in this case the MPNE is in no way interesting for area A, as compared to the passive attitude versus the cartel of producers;
  - if damage is inferior to this limit value (with our numerical parameters $d <\sim 0.03$), $V_A^T\left(X_0\right)[\vec{\alpha}_T\left(d\right)] > V_A^c\left(X_0\right)$; in this case $V_A^T\left(X_0\right)[\vec{\alpha}_T\left(d\right)]$ is really a maximum payoff; see the figures for MPNE case at the end of the paper.

Finally, in the MPNE, if the number of financing countries is sufficient, there is for a range of values for damage a positive value of the rate of transfer that

[14] As far as the MPNE is concerned.

gives a maximum payoff. The problem is that it is not certain to gather such a number of financing countries.

- Very interestingly, when $n = 0.7$ or above and when damage is smaller than this limit value, $\vec{\alpha}_T(d)$ is smaller than $\grave{\alpha}$, the switch value under which $V_B^T(X_0)[\alpha] > V_B^c(X_0)$. It implies that area B payoff for $\vec{\alpha}_T(d)$ is greater than that of the reference cartel case. Although the area B payoff is decreasing with α, the area gets an interest in the MPNE with transfer as compared to the reference case! Note also that $\vec{\alpha}_T(d) < \breve{\alpha}$ (the transfer is positive at the optimum value of the rate of transfer, as expected).

4 A Stackelberg equilibrium

In the "T MPNE" the area A payoff is increasing in the rate of transfer only if the number of financing countries versus the non financing ones is high. Hence the idea to look at a Feedback Stackelberg strategy in which area B would be the leader and could improve its payoff as compared to the MPNE, with perhaps also a surge in area A payoff with the rate of transfer even when the number of financing countries is smaller.

More precisely, area B is now the leader and the producers are the follower[15]. We use the concept of "stagewise" Stackelberg : at each step, knowing the reaction function of the follower, the leader chooses the carbon tax that maximizes its payoff. In this case there could not be any time inconsistency. We call the solution "S" for obvious reasons.

We keep the assumption that both players play in prices and not in quantitities. However, recently, Wirl has studied resource games where one or both players play quantities instead of prices (Wirl (2011)). It concludes however that quantities are

[15] The case where the producers are the leader and the area B the follower could not improve the payoff of area B. In fact in this case the Stackelberg equilibrium is identical to the MPNE. See for instance Rubio and Escriche (2001).

poor instruments: there are only a few situations where interior solutions can be found.

4.1 The solution

Let's first consider the reaction function of the regulator of the producers. If the leader - the area B regulator - chooses firstly the carbon tax θ, the problem of the follower is:

$$\rho V_p^S(X) = \max_p \left\{ \left(p - c(X) - V_p^{S\prime}(X)\right) x(p+\theta) \right\} \tag{III.51}$$

It comes:

$$\begin{aligned} p &= c(X) + bx + V_p^{S\prime}(X) && \text{(III.52)} \\ &= c(X) + a - p - \theta + V_p^{S\prime}(X) && \text{(III.53)} \end{aligned}$$

Hence the reaction function of the follower is:

$$p = \frac{1}{2}\left(a + c(X) + V_p^{S\prime}(X) - \theta\right) \tag{III.54}$$

It implies:

$$x = \frac{1}{2b}\left(a - c(X) - V_p^{S\prime}(X) - \theta\right) \tag{III.55}$$

The method of resolution used here is that used by Tahvonen (1996) or Rubio and Escriche (2001): the reaction function of the follower is introduced into the area

B regulator's problem:

$$\rho V_B^S(X) = \max_\theta \left\{ \begin{array}{c} nu(x) - n(p+\alpha\theta)x \\ -nd\,(X_0 - X)^2 - xV_B^{S,}(X) \end{array} \right\} \quad \text{(III.56)}$$

$$\text{with } x = \frac{1}{2b}\left(a - c(X) - V_p^{S\prime}(X) - \theta\right) \quad \text{(III.57)}$$

$$p = \frac{1}{2}\left(a + c(X) + V_p^{S\prime}(X) - \theta\right) \quad \text{(III.58)}$$

Then:

$$[nu^{'}(x) - n(p+\alpha\theta) - V_B^{S,}(X)]\frac{\partial x}{\partial \theta} - n\alpha x - nx\frac{\partial p}{\partial \theta} = 0 \quad \text{(III.59)}$$

Note that:

$$\frac{\partial x}{\partial \theta} = -\frac{1}{2b} \quad \text{(III.60)}$$

$$\frac{\partial p}{\partial \theta} = -\frac{1}{2} \quad \text{(III.61)}$$

Hence:

$$n\,(a - bx) - n(a - bx - \theta + \alpha\theta) - V_B^{S,}(X) = -2bn\alpha x + nxb \quad \text{(III.62)}$$

$$V_B^{S,}(X) = nxb\,(2\alpha - 1) + n\theta\,(1-\alpha) \quad \text{(III.63)}$$

$$\theta = \frac{1}{n\,(1-\alpha)}\left(V_B^{S,}(X) - nxb\,(2\alpha - 1)\right) \quad \text{(III.64)}$$

There is no solution if $\alpha = 1$.

$V_B^{S,}(X)$ is the marginal cost of the pollution stock. Hence $V_B^{S,}(X) > 0$. If $\alpha < \frac{1}{2}$, $\theta > 0$. Here appears one of the benefits of the Stackelberg equilibrium versus the MPNE: until a rate of transfer of $\frac{1}{2}$, the carbon tax is always positive.

The optimal carbon tax depends on the difference between the marginal cost of the pollution stock and of a factor $nxb\,(1-2\alpha)$ resulting simultaneously of the strategic interactions between producers and area B and of the process of transfer of a part of the carbon tax to area A. If no transfer, there is a term nbx that results of the strategic advantage of area B and therefore was not present in the MPNE. Because of this advantage the carbon tax can be higher (as seen later because the producer price is reduced as compared to the MPNE). The term $2nb\alpha x$ coming from the transfer is higher in the "S"equilibrium than in the MPNE. A higher rate of transfer increases this term: the increase of the burden on the surplus when the rate of transfer increases has to be somewhat compensated by a lower tax that pushes upward consumption and hence surplus.

Using:

$$x = \frac{1}{2b}\left(a - c(X) - V_p^{S\prime}(X) - \theta\right)$$

and:

$$\theta = \frac{1}{n(1-\alpha)}\left(V_B^{S,}(X) - nxb\,(2\alpha - 1)\right)$$

It comes:

$$x = \frac{(1-\alpha)}{(3-4\alpha)\,b}[a - c(X) - V_p^{S\prime}(X) - \frac{1}{n(1-\alpha)}V_B^{S,}(X)] \tag{III.65}$$

However:

$$\rho V_p^S(X) = bx^2 \tag{III.66}$$

$$\rho V_p^S(X) = \frac{(1-\alpha)^2}{(3-4\alpha)^2\,b}[a - c(X) - V_p^{S\prime}(X) - \frac{1}{n(1-\alpha)}V_B^{S,}(X)]^2 \tag{III.67}$$

$$\rho V_B^S(X) = nu(x) - n(p+\alpha\theta)x - nd\,(X_0 - X)^2 \tag{III.68}$$

$$-xV_B^{S,}(X) \tag{III.69}$$

$$\rho V_B^S(X) = nb(\frac{3}{2} - 2\alpha)x^2 - nd\,(X_0 - X)^2 \tag{III.70}$$

Oil consumption gives a positive payoff only if $\alpha < \frac{3}{4}$. This limit is higher than in the T MPNE, resulting of the strategic advantage of the leader. It's assumed from now on that $\alpha < \frac{3}{4}$.

$$\begin{aligned} \rho V_B^S(X) &= \frac{n\,(1-\alpha)^2}{2\,(3-4\alpha)\,b}[a - c(X) - V_p^{S\prime}(X) - \frac{1}{n\,(1-\alpha)}V_B^{S,}(X)]^2 && \text{(III.71)} \\ & -nd\,(X_0 - X)^2 && \text{(III.72)} \end{aligned}$$

Now, using the same method as for the MPNE (Appendix III.B.1), one finds:

$$\tilde{X}_\infty = \frac{c_1 - a + \frac{2dX_0}{\rho(1-\alpha)}}{c_2 + \frac{2d}{\rho(1-\alpha)}} \tag{III.73}$$

Final oil stock is the same in the "S" equilibrium and in the "T" equilibrium. The difference is in the path to this same final value.

$$\begin{aligned} X &= \tilde{X}_\infty + \left(X_0 - \tilde{X}_\infty\right) e^{s_2 t} && \text{(III.74)} \\ x &= -s_2 \left(X_0 - \tilde{X}_\infty\right) e^{s_2 t} && \text{(III.75)} \\ p + \theta &= a + bs_2 \left(X_0 - \tilde{X}_\infty\right) e^{s_2 t} && \text{(III.76)} \\ \left(\dot{p} + \dot{\theta}\right) &> 0 && \text{(III.77)} \end{aligned}$$

with[16]:

$$s_2 = \frac{(3-4\alpha)}{(5-6\alpha)}\left(\frac{\rho}{2}\right)\left(1 - \sqrt[2]{1 + \frac{8\,(1-\alpha)\,(5-6\alpha)}{\rho^2 b(3-4\alpha)^2}\left(\frac{d}{(1-\alpha)} + \rho\frac{1}{2}c_2\right)}\right) \tag{III.78}$$

16 $\frac{\partial s_2}{\partial \alpha} < 0$ (Appendix III.B.3).

As far as the carbon tax is concerned, it can be proved that at the infinite the value is the same as in the MPNE:

$$\tilde{\theta}_\infty = \frac{2d\,(a - c_1 + c_2 X_0)}{2d + \rho\,(1-\alpha)\,c_2} \tag{III.79}$$

And:

$$\tilde{p}_\infty = c_1 - c_2 \tilde{X}_\infty \tag{III.80}$$

Note that $s_2 > r_2$ (Appendix III.B.2). Hence:

$$(p+\theta)_S\,(0) - (p+\theta)_T\,(0) = b\left(X_0 - \tilde{X}_\infty\right)(s_2 - r_2) > 0 \tag{III.81}$$

and when $t \to \infty$:

$$(p+\theta)_S - (p+\theta)_T \sim b s_2 \left(X_0 - \tilde{X}_\infty\right) e^{s_2 t} < 0 \tag{III.82}$$

A date zero the stackelberg consumer price is superior to that of the MPNE. It is the contrary when $t \to \infty$. The fact that the initial consumer price is superior in the Stackelberg equilibrium to that of the MPNE suggests it's because it's the same for the carbon tax. Indeed (Appendix III.B.4): $(\theta)_S\,(0) > (\theta)_T\,(0)$. As intuition suggests, the initial producer in the Stackelberg equilibrium is inferior to that of the MPNE, resulting of the strategic advantage of area B: $(p)_S\,(0) < (p)_T\,(0)$.

It's also possible to get the analytical solution for the carbon tax (Appendix III.B.8):

$$\theta = \left(X_0 - \tilde{X}_\infty\right)\left[\frac{2d}{\rho\,(1-\alpha)} + e^{s_2 t}\left(c_2 + 2bs_2 - \frac{2bs_2^2}{\rho}\right)\right] \tag{III.83}$$

Proposition 4.1. *As far as the carbon tax is concerned:*

- If $d > d_3$ the carbon tax is always increasing with time, its initial value being positive if $\alpha < \breve{\alpha}$ and negative if $\alpha > \breve{\alpha}$.

- If $d < d_3$ (in this case $\bar{\alpha} < \breve{\alpha}$): when $\alpha < \bar{\alpha}$ the carbon tax is decreasing with

time but its initial value is positive and it remains always positive; when $\bar{\alpha} < \alpha < \breve{\alpha}$ *both initial value and derivative with time are positive; when* $\alpha > \breve{\alpha}$ *the carbon tax is increasing with time and its initial value is negative.*

It implies in particular that the carbon tax is always positive if $\alpha < \breve{\alpha}$*, whatever the damage.*

Note d_3 *is such that:*

$$\frac{6b\rho}{5}\left(1-\sqrt[2]{1+\frac{40d_3}{9b\rho^2}+\frac{20c_2}{9b\rho}}\right)=\left(-3c_2+\frac{4d_3}{\rho}\right) \tag{III.84}$$

and $\breve{\alpha}$ *and* $\bar{\alpha}$ *depending on damage are such that:*

$$s_{2(\breve{\alpha})}=\frac{\rho\left(1-2\breve{\alpha}\right)}{3-4\breve{\alpha}} \tag{III.85}$$

$$4bs_{2(\bar{\alpha})} = \frac{-c_2\left(3-4\bar{\alpha}\right)+\frac{4d}{\rho}}{\left(1-\bar{\alpha}\right)} \tag{III.86}$$

Furthermore, the initial value of the carbon tax is decreasing with the rate of transfer.

The proof is in the Appendix III.B.4. As in the MPNE, the higher the burden of transfer, the lesser the ability to have a strong initial carbon tax, and of course the smaller the strategic pressure put on the sellers through the initial tax. From an economic standpoint the case $\alpha > \breve{\alpha}$ can be ruled out as area A should not agree with a negative transfer at any date. Note that this switch value is greater than $\frac{1}{2}$, which is very different from the MPNE where it is smaller than $\frac{1}{2}$.

The developments relative to the derivative of the producer price with respect to time are in the Appendix III.B.5, as they are not essential. As in the MPNE, simulation confirms the intuition that the initial producer price is always increasing with the rate of transfer. The reason is that the area B regulator has to soften the pressure put on the producer as the external burden coming from the transfer to area A rises.

As in the MPNE, with contradictory trends of the evolution with the rate of transfer of the initial carbon tax and of the initial producer price, the question is to understand what's happening with the initial oil consumption

Proposition 4.2. *For "small" damage, initial oil consumption is increasing with the rate of transfer on the whole range* $0 - \frac{3}{4}$*. For more "severe" damage, initial oil consumption woud be decreasing for small and intermediate values of the rate of transfer and increasing with it when it is near* $\frac{3}{4}$*.*

The proof is in Appendix III.B.6. Analytically it can be proved that when the rate of transfer is above $\frac{2}{3}$, initial oil consumption is increasing with the rate of transfer. In this range, the carbon tax has to be pushed down strongly to somewhat offset the increase of the external burden. Analytically it is also possible to prove that, when damage is zero or near it and the rate of transfer is zero or near it, initial oil consumption is increasing in the rate of transfer. It requires simulation to extend these results.

With our values of parameters, for "small" damage initial oil consumption is increasing with the rate of transfer on the whole range $0 - \frac{3}{4}$: the negative effect of an increase of the rate of transfer on the carbon tax is higher than the positive effect on the producer price, confirming the necessity for area B to soften its policy against climate change as this rate increases.

For more "severe" damage, initial oil consumption woud be decreasing for small and intermediate values of the rate of transfer and increasing with it when it is near $\frac{3}{4}$. The interpretation for the range far from $\frac{3}{4}$ is that when the rate of transfer increases the tendency (coming from the higher external burden) to push down the initial carbon tax is somewhat weakened by the necessity to have a high initial carbon tax to fight the environmental damage. However this is no longer possible when the rate of transfer gets nearer $\frac{3}{4}$, as the external burden is so high that environmental motives become secondary.

With our values of parameters, $d \sim 0.01$ is the limit of "small" damage. This limit depends on our parameters but is roughly the same for $n = 0.4$ and for $n = 0.7$.

4.2 Payoffs

4.2.1 Area B payoff

$$\rho V_B^S(X_0) = nb(x_0^2)_S(\frac{3}{2} - 2\alpha) \tag{III.87}$$

When $\alpha \to \frac{3}{4}$ this payoff tends to zero and hence is decreasing with α. However when $\alpha = \frac{1}{2}$ it is strictly positive and therefore greater than that of the MPNE. Clearly, the strategic advantage area B has in the Stackelberg case allows it to keep a positive payoff with a rate of transfer around $\frac{1}{2}$. This suggests to compare the payoffs of the two equilibriums for each rate of transfer inferior to $\frac{1}{2}$.

$$\frac{V_B^S(X_0)}{V_B^T(X_0)} = \frac{s_2^2(\frac{3}{2} - 2\alpha)}{r_2^2(\frac{1}{2} - \alpha)} \tag{III.88}$$

Simulation confirms that for our values of parameters this ratio is always greater than one when $\alpha < \frac{1}{2}$ (Appendix III.B.7), as intiution suggests: for every rate of transfer smaller than $\frac{1}{2}$ the payoff for area B is better in the Stackelberg equilibrium than in the MPNE. In any of these cases area B has a strong interest to take the leadership in front of the producers.

As in the MPNE, there is a priori an ambiguity of the evolution of the area B payoff with α, at least when α is not near $\frac{3}{4}$. Simulation confirms that this payoff is always decreasing with the rate of transfer, whatever the rate of transfer and the damage. The higher external burden cannot be offset in any case by the strategy played against the producers.

As in the MPNE, the producers' cartel case with passive consumers seems the right possibility as far as a reference case is looked for[17]. $V_B^c(X_0)$ decreases with

[17] In this cartel case :

$$V_B^c(X_0) = n\left(\frac{a - c_1 + c_2X_0}{c_2}\right)^2 \tag{III.89}$$

$$* \left(\frac{b}{2}\frac{u_2^2}{\rho - 2u_2} - d\left(\frac{1}{\rho - 2u_2} - \frac{2}{\rho - u_2} + \frac{1}{\rho}\right)\right) \tag{III.90}$$

damage and becomes negative when damage becomes more severe[18]. As $V_B^S(X_0)$ is always positive, beyond this value of damage, whatever the rate of transfer:

$$V_B^S(X_0)\,[\alpha] > 0 > V_B^c\,(X_0) \tag{III.91}$$

When damage is under the value where the cartel payoff is nil, there is always a switch value of the rate of transfer $\acute{\alpha}$, which is greater than $\frac{1}{2}$: under it $V_B^S(X_0)\,[\alpha] > V_B^c\,(X_0)$, above it and of course near $\frac{3}{4}$ we have $V_B^S(X_0)\,[\alpha] < V_B^c\,(X_0)$. For a same value of damage the switch value is of course higher in the Stackelberg equilibrium than in the MPNE since the payoff of the former is higher than that of the latter. In the Stackelberg equilibrium with a "small" environmental damage, the rich area of consumers gets a better payoff than in the passive situation of the producers' cartel when the rate of transfer is not too high.

4.2.2 Producers' payoff

$$\rho V_P^S(X_0) = bs_2^2\left(X_0 - \tilde{X}_\infty\right)^2 \tag{III.92}$$

As in the MPNE, in case of "small" damage, producers can see their payoff increasing with the rate of transfer, because area B has to bring down its strategic pressure on producers in answer to the higher external burden it bears.

4.2.3 Area A payoff

The assumptions are the same as those of 2.4.3. Then:

$$V_A^S\,(X_0) = (1-n)\int_0^\infty \left(u\,(x_S) - p_S x_S\right) e^{-\rho t}dt + \int_0^\infty \alpha n\theta_S x_S e^{-\rho t}dt \tag{III.93}$$

It's possible to get (Appendix III.B.8):

[18] With our parameters it happens when $d \sim 0.0065$

$$V_A^S(X_0) = (1-n)\frac{b}{2}\frac{s_2^2\left(X_0 - \tilde{X}_\infty\right)^2}{\rho - 2s_2} \tag{III.94}$$

$$-(\alpha n + 1 - n)\, s_2 \left(X_0 - \tilde{X}_\infty\right)^2 \left[\frac{2d}{\rho(1-\alpha)(\rho - s_2)} + \frac{c_2 + 2bs_2 - 2bs_2^2\left(\frac{1}{\rho}\right)}{(\rho - 2s_2)}\right]$$

Proposition 4.3. *If damage is "small" and if the number of financing countries is greater than 0.4, then there is a positive value of the rate of transfer and hence a Stackelberg equilibrium that maximizes the payoff of area A as compared with all the other Stackelberg equilibriums and as compared with the reference case of the passive consumers in front the cartelized producers. With this value of the rate of transfer, the payoff of area B is also superior to that of the reference case.*

- Calculus shows (see Appendix III.B.8) that, when the number of financing countries is greater than $n = 0.44$, it is sure that this payoff is increasing with the rate of transfer when this one is zero or near it and when damage is zero or near it. As calculus shows also that, when damage is zero or near it, the payoff is negative when the rate of transfer is $\frac{3}{4}$, it comes that there is a positive value of the rate of transfer between 0 and $\frac{3}{2}$ that maximizes this payoff when damage is zero or near it.

- Simulation confirms and extends this result for our values of parameters. For $n = 0.7$ and for $n = 0.4$ (for $n = 0.4$ it was not true in the MPNE) this payoff is increasing with the rate of transfer for small and intermediate values of this rate, when damage is inferior to a limit value at least for a relatively small number of financing countries (with our parameters this limit value is $d \sim 0.1$ when $n = 0.4$, but does not seem to exist for $n = 0.7$). Hence there is a maximum value of this payoff for a strictly positive value of the rate of transfer.

- The second term, that is the total discounted transfer, is surely positive if $\alpha < \check{\alpha}$, since in this case the carbon tax is always positive; from the area A standpoint this range of rate is the only one to consider; simulation shows that in cases where there is a maximum for the payoff, it is for a rate of transfer which is inferior to $\check{\alpha}$, which confirms the interest of this maximum for area A.

- The sign of the derivative is not sufficient to assess the interest of the Stackelberg equilibrium as far as the payoff is concerned: we have to compare it to the reference case of the producer cartel with passive consumers[19]. $V_A^c(X_0)$ does not depend on damage. On the contrary, $V_A^S(X_0)[\alpha]$ depends on damage and on the rate of transfer. Let's call $\vec{\alpha}_S(d)$ the rate of transfer where $V_A^S(X_0)[\alpha]$ is maximum. Simulation shows that there are two different cases:

  if damage is superior to a limit value (with our numerical parameters, $d \sim 0.1$ if $n = 0.4$, and 0.2 if $n = 0.7$), $V_A^c(X_0) > V_A^S(X_0)[\vec{\alpha}_S(d)]$; in this case the Stackelberg equilibrium is in no way interesting for area A, as compared to the passive attitude versus the cartel of producers;

  if damage is inferior to this limit value, $V_A^S(X_0)[\vec{\alpha}_S(d)] > V_A^c(X_0)$; in this case $V_A^S(X_0)[\vec{\alpha}_S(d)]$ is really a maximum payoff; see the figures for the Stackelberg case at the end of the paper. Note $\vec{\alpha}_S(d)$ is largely superior to zero: for instance, if $d = 0.006$, with our parameters: $\vec{\alpha}_S(d) \sim 0.35$ for $n = 0.4$ and 0.47 for $n = 0.7$.

  Finally, in the Stackelberg case, even if the number of financing countries is relatively small, there is for a range of values for damage a positive value of the rate of transfer that gives a maximum payoff.

[19] Note that:

$$\begin{aligned} V_A^c(X_0) &= (1-n)\left(\frac{a - c_1 + c_2 X_0}{c_2}\right)^2 \\ &\quad * \left(\frac{b}{2}\frac{u_2^2}{\rho - 2u_2}\right) \end{aligned}$$

- Very interestingly, when damage is inferior to this limit value, $\vec{\alpha}_S(d)$ is inferior to the switch value $\acute{\alpha}$ under which $V_B^S(X_0)[\alpha] > V_B^c(X_0)$. It implies that area B payoff for $\vec{\alpha}_S(d)$ is superior to that of the reference cartel case. Although the area B payoff is decreasing with α, the area gets an interest in the Stackelberg Equilibrium with transfer as compared to the reference case! Note also that $\vec{\alpha}_S(d) < \breve{\alpha}$ (as expected the transfer is positive at the optimum value of the rate of transfer).

In conclusion, this paper is a contribution to the discussion relative to the setting up of a world carbon tax. Very likely, the introduction of a carbon tax within the poor countries and perhaps within the emergent countries could require a financial transfer from the old rich countries. The possibility appears (at least for a range of values of the environmental damage) that, if the rich countries act a cartel and play a dynamic game with the producers, the poor and emergent countries can strike a profitable deal for themselves: the setting up of a carbon tax against a moderate rate of transfer of the produce of their carbon tax by the old rich countries. This deal seems more likely if the rich countries take the leadership in front of the producers. It remains that the higher the transfer, the smaller the welfare of the old rich countries, but we have seen that when there is a value of the rate of transfer that maximizes the poor and emergent countries payoff the old rich countries are better off than in the reference case where they are passive in front of the cartelized producers. This is a strong argument but many, however, can argue that the world economic crisis, especially in OECD, can prevent from going in this direction.

Figures for MPNE

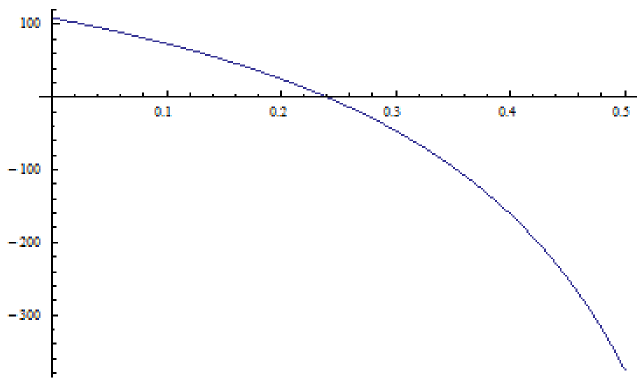

Figure III.1: $n = 0.4, \theta\,(0)_T\,[\alpha]$ for $d = 0.004$

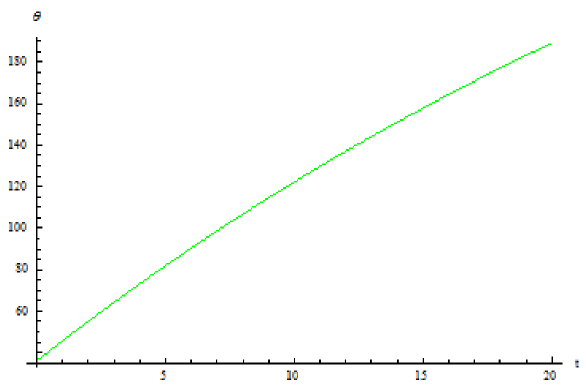

Figure III.2: $n = 0.4, \theta_T\,(t)$ for $d = 0.006$ and $\alpha = 0.2$

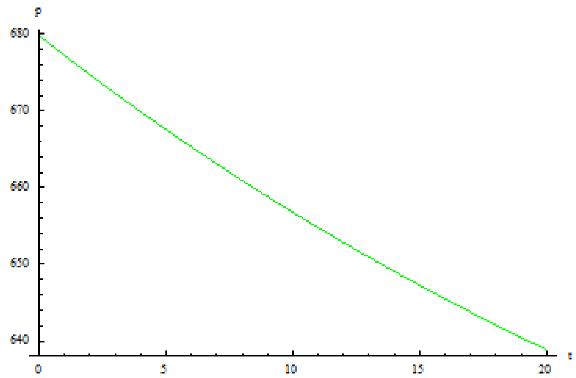

Figure III.3: $n = 0.4, p_T(t)$ for $d = 0.006$ and $\alpha = 0.2$

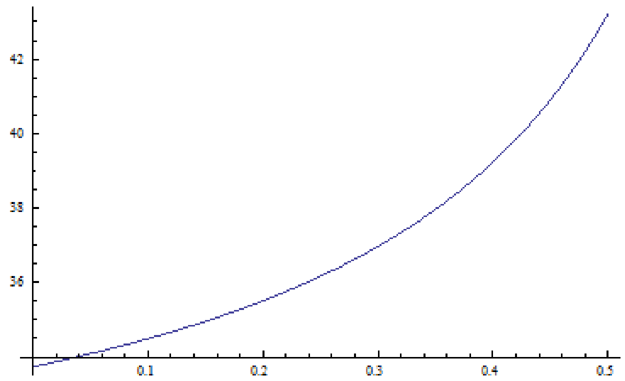

Figure III.4: $n = 0.4, x_T(0)[\alpha]$ for $d = 0.006$

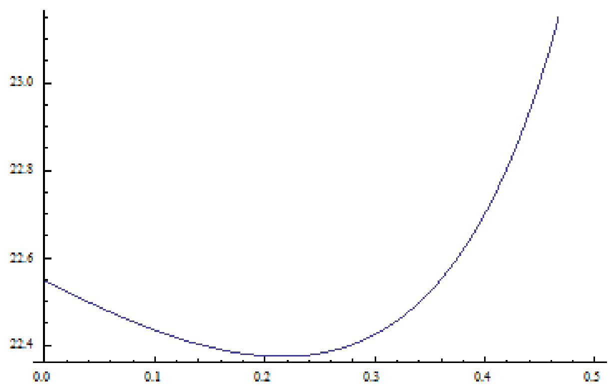

Figure III.5: $n = 0.4, x_T(0)[\alpha]$ for $d = 0.04$

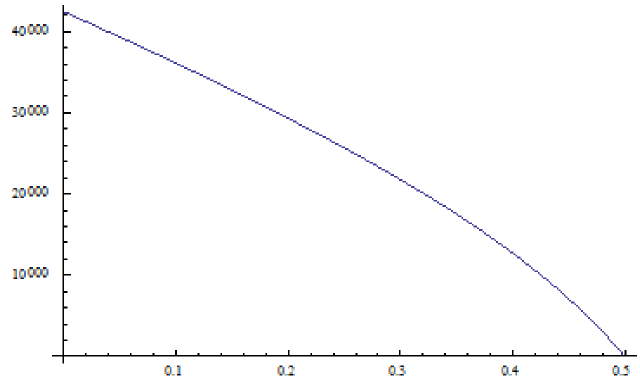

Figure III.6: $n = 0.4, V_B^T(X_0)[\alpha]$ for $d = 0.004$

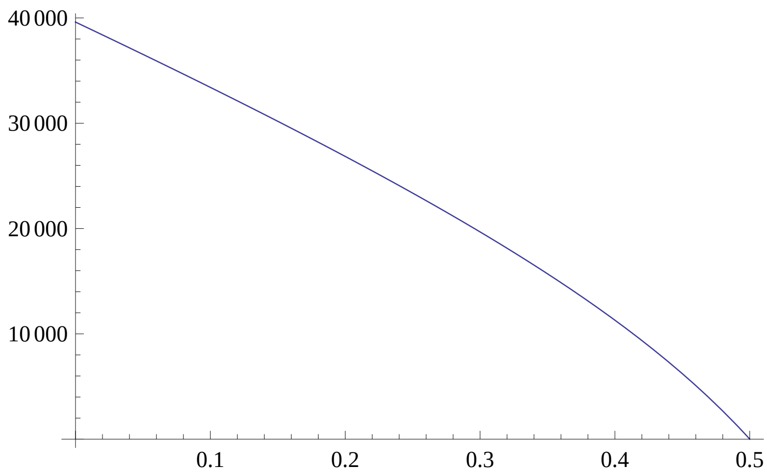

Figure III.7: $n = 0.4, V_B^T(X_0)[\alpha] - V_B^c$ for $d = 0.004$

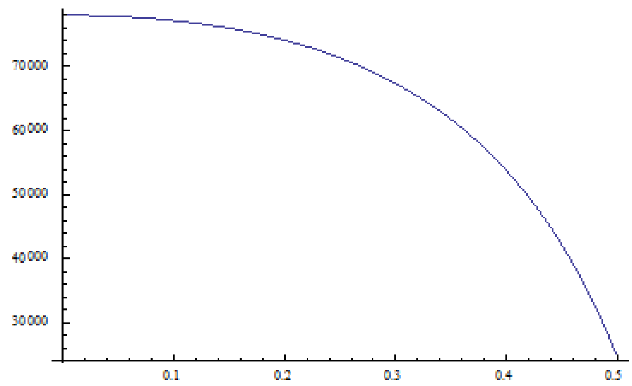

Figure III.8: $n = 0.4, V_A^T(X_0)[\alpha]$ for $d = 0.004$

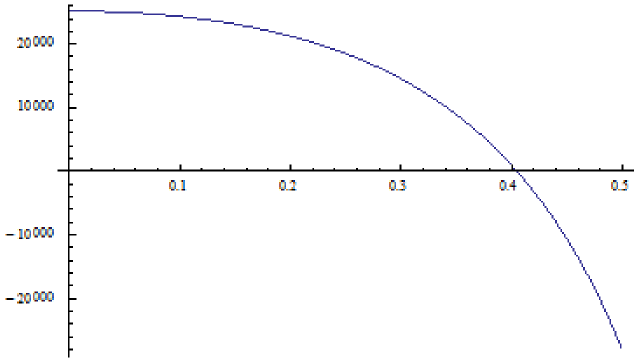

Figure III.9: $n = 0.4, V_A^T(X_0)[\alpha] - V_A^c(X_0)$ for $d = 0.004$

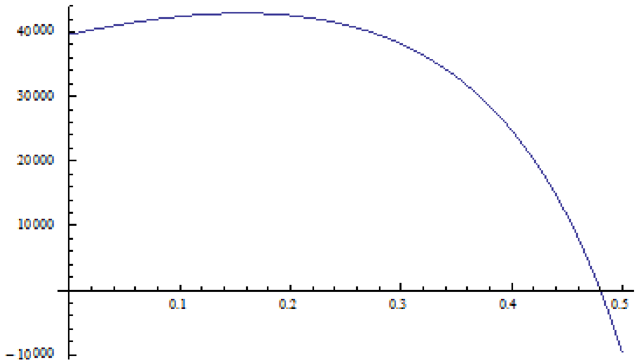

Figure III.10: $n = 0.7$, $V_A^T(X_0)[\alpha]$ for $d = 0.004$. Maximum in $\alpha \sim 0.16$

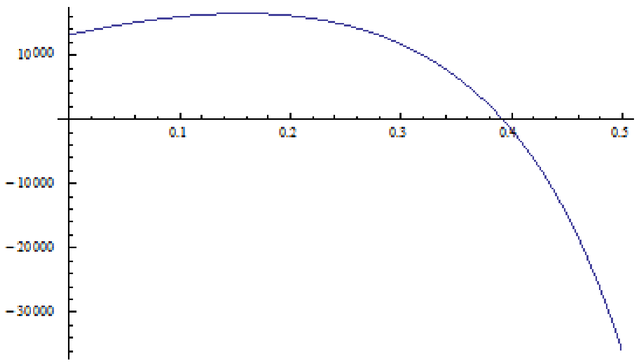

Figure III.11: $n = 0.7$. For $d = 0.004$, $V_A^T(X_0)[\alpha] - V_A^c$

Figures for the Stackelberg case

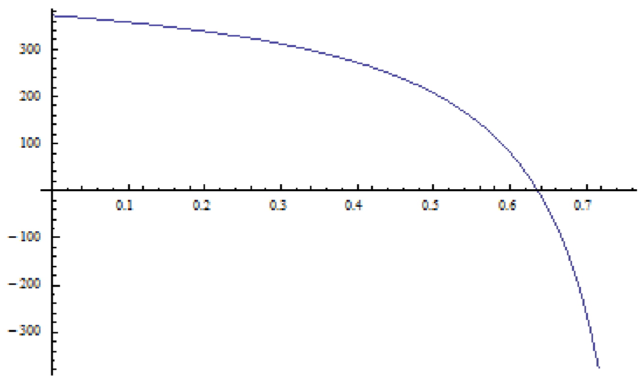

Figure III.12: $n = 0.4, \theta_S(0)[\alpha]$ for $d = 0.004$

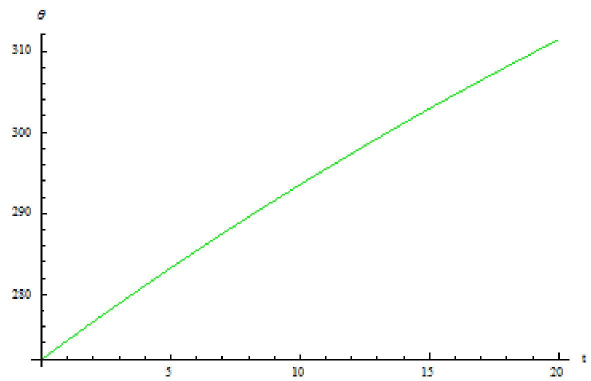

Figure III.13: $n = 0.4, \theta_S(t)$ for $d = 0.004$ and $\alpha = 0.4$

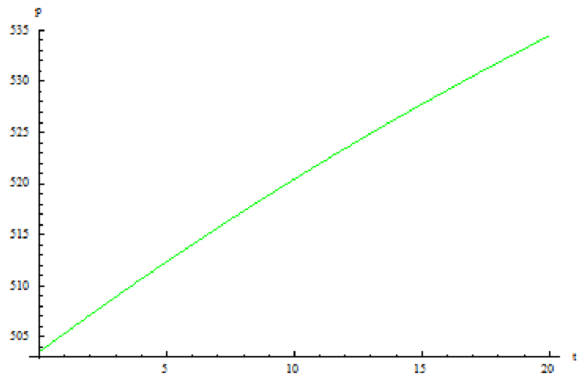

Figure III.14: $n = 0.4, p_S(t)$ for $d = 0.004$ and $\alpha = 0.4$

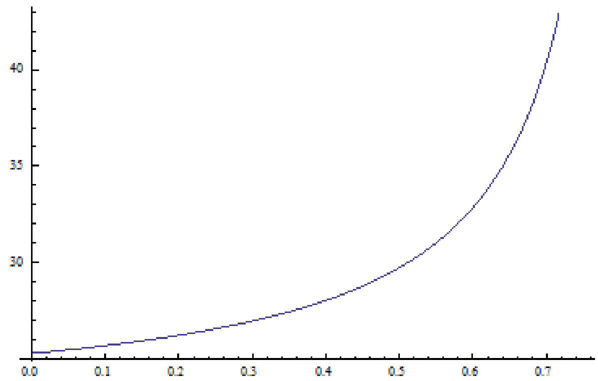

Figure III.15: $n = 0.4, x_S(0)[\alpha]$ for $d = 0.004$

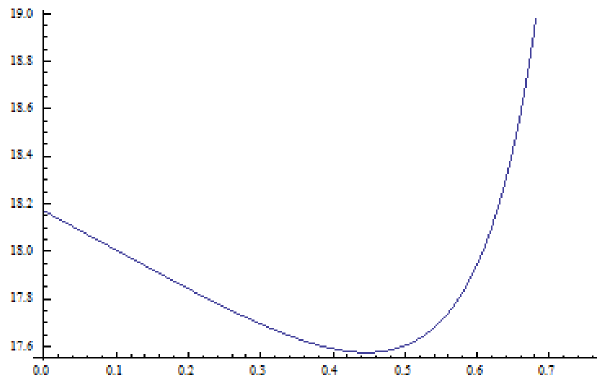

Figure III.16: $n = 0.4, x_S(0)[\alpha]$ for $d = 0.03$

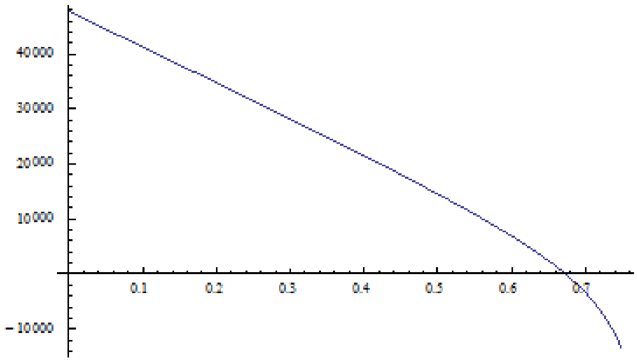

Figure III.17: $n = 0.4, V_B^S\left(X_0\right)[\alpha] - V_B^C\left(X_0\right)$ for $d = 0.004$

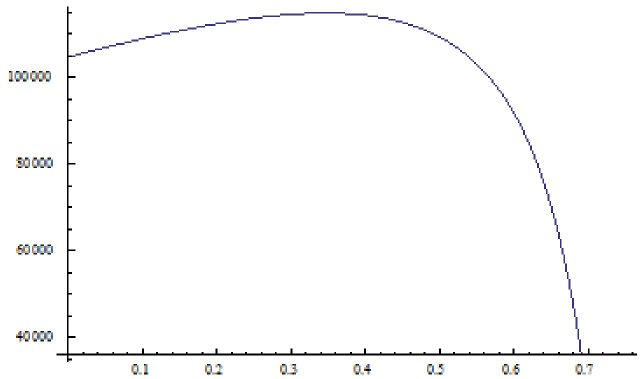

Figure III.18: $n = 0.4, V_A^S\left(X_0\right)[\alpha]$ for $d = 0.004$

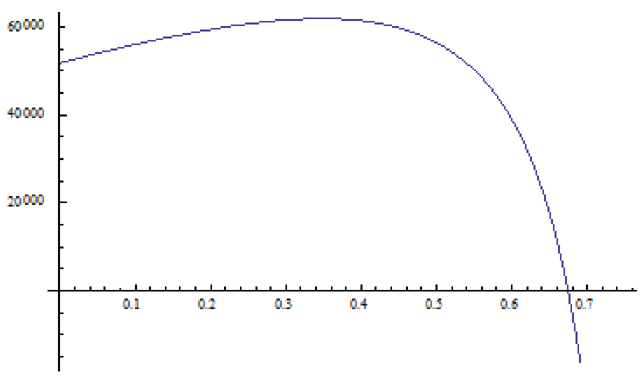

Figure III.19: $n = 0.4, V_A^S\left(X_0\right)[\alpha] - V_A^C\left(X_0\right)$ for $d = 0.004$

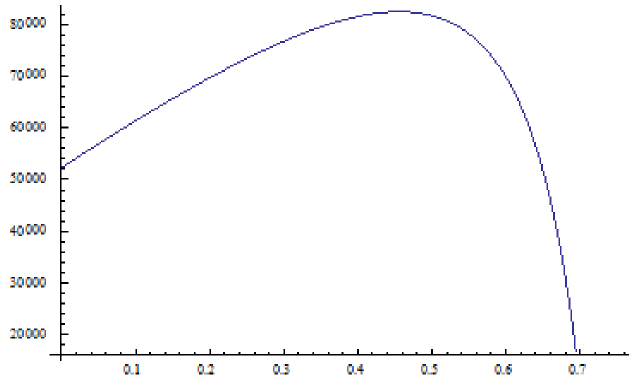

Figure III.20: $n = 0.7, V_A^S(X_0)[\alpha]$ for $d = 0.004$

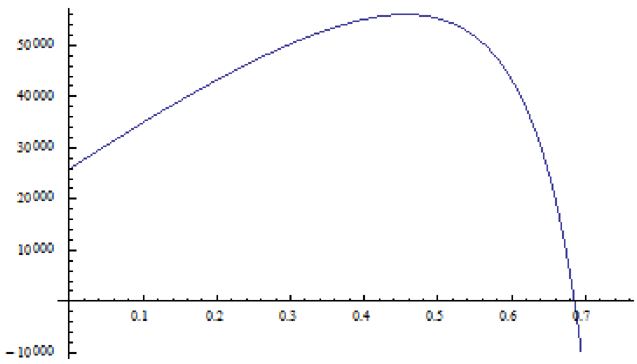

Figure III.21: $n = 0.7, V_A^S(X_0)[\alpha] - V_A^C(X_0)$ for $d = 0.004$

III.A T MPNE

III.A.1 The equilibrium

$$\rho V_p^T(X) = \frac{(1-\alpha)^2}{b(2-3\alpha)^2}\left(a - c(X) - V_p^{T\prime}(X) - \frac{V_B^{T\prime}(X)}{n\,(1-\alpha)}\right)^2$$

and:

$$\rho V_B^T(X) = n\left(\frac{1}{2}-\alpha\right)\frac{(1-\alpha)^2}{b(2-3\alpha)^2}\left(a - c(X) - V_p^{T\prime}(X) - \frac{V_B^{T\prime}(X)}{n\,(1-\alpha)}\right)^2 - nd\,(X_0 - X)^2$$

Or, more useful:

$$\frac{1}{n\,(1-\alpha)}\rho V_B^T(X) = \left(\frac{1}{2}-\alpha\right)\frac{(1-\alpha)}{b(2-3\alpha)^2}\left(a - c(X) - V_p^{T\prime}(X) - \frac{V_B^{T\prime}(X)}{n\,(1-\alpha)}\right)^2$$

$$-\frac{d\,(X_0-X)^2}{(1-\alpha)}$$

Let's note;

$$Z = V_p^T(X) + \frac{V_B^T(X)}{n\,(1-\alpha)}$$

$$\Rightarrow Z' = V_p^{T\prime}(X) + \frac{V_B^{T\prime}(X)}{n\,(1-\alpha)}$$

Hence:

$$\rho Z = (3-4\alpha)\frac{(1-\alpha)}{2b(2-3\alpha)^2}\left(a - c_1 + c_2 X - Z'\right)^2$$

$$-\frac{d\,(X_0-X)^2}{(1-\alpha)}$$

Let's look for quadratic solutions:

$$Z = z_0 + z_1 X + \frac{1}{2} z_2 X^2$$

$$\Rightarrow Z' = z_1 + z_2 X$$

By identification:

$$\rho\frac{1}{2}z_2 = (3-4\alpha)\,\frac{(1-\alpha)}{2b(2-3\alpha)^2}\,(c_2-z_2)^2 - \frac{d}{(1-\alpha)}$$

This equation of the 2nd degree can be written:

$$(3-4\alpha)\,\frac{(1-\alpha)}{2b(2-3\alpha)^2}\,(c_2-z_2)^2 - \rho\frac{1}{2}(z_2-c_2) - \frac{d}{(1-\alpha)} - \rho\frac{1}{2}c_2 = 0$$

If:

$$m = (3-4\alpha)\,\frac{(1-\alpha)}{b(2-3\alpha)^2}$$

Hence:

$$\frac{1}{2}m\,(c_2-z_2)^2 - \rho\frac{1}{2}(z_2-c_2) - \frac{d}{(1-\alpha)} - \rho\frac{1}{2}c_2 = 0$$

The discriminant is:

$$\frac{\rho^2}{4} + 2m\left(\frac{d}{(1-\alpha)} + \rho\frac{1}{2}c_2\right) = \frac{\rho^2}{4}\delta$$

Note that: $\delta > 1$

And:

$$\delta = \frac{8m}{\rho^2}\left(\frac{d}{(1-\alpha)} + \rho\frac{1}{2}c_2\right) + 1$$

$$= \frac{8}{\rho^2}\,(3-4\alpha)\,\frac{(1-\alpha)}{b(2-3\alpha)^2}\left(\frac{d}{(1-\alpha)} + \rho\frac{1}{2}c_2\right) + 1$$

Hence:

$$z_2 - c_2 = \frac{1}{m}\left(\frac{\rho}{2}\right)\left(1 \pm \sqrt[2]{\delta}\right)$$

To select the right root, note that:

$$\dot{X} = -x = -\frac{(1-\alpha)}{b(2-3\alpha)}\,(a - c_1 - z_1 + (c_2 - z_2)X)$$

For the solution of this differential equation to converge, it is necessary that:

$$c_2 - z_2 > 0$$

$$\Rightarrow z_2 - c_2 = \frac{1}{m}\left(\frac{\rho}{2}\right)\left(1 - \sqrt[2]{\delta}\right)$$

Also by identification

$$\rho z_1 = m\left(c_2 - z_2\right)\left(a - c_1 - z_1\right) + \frac{2dX_0}{(1-\alpha)}$$

$$\Rightarrow z_1 = \frac{m\left(c_2 - z_2\right)\left(a - c_1\right) + \frac{2dX_0}{(1-\alpha)}}{\rho + m\left(c_2 - z_2\right)}$$

If noting $\tilde{X}_\infty$ the final stock of oil, and if reminding that, since resource is limited, when $t \to \infty$, $x \to 0$, then:

$$\dot{X}(\tilde{X}_\infty) = 0$$

$$\tilde{X}_\infty = -\frac{a - c_1 - z_1}{c_2 - z_2}$$

It can be worked out that:

$$a - c_1 - z_1 = \frac{\rho\left(a - c_1\right) - \frac{2dX_0}{(1-\alpha)}}{\rho + m\left(c_2 - z_2\right)}$$

It's easy to prove that:

$$\rho + m\left(c_2 - z_2\right) = \left(\frac{\rho}{2}\right)\left(1 + \sqrt[2]{\delta}\right)$$

Then:

$$\tilde{X}_\infty = \frac{\rho\left(a - c_1\right) - \frac{2dX_0}{(1-\alpha)}}{\left(\frac{\rho}{2}\right)\left(1 + \sqrt[2]{\delta}\right)\left(\frac{1}{m}\left(\frac{\rho}{2}\right)\left(1 - \sqrt[2]{\delta}\right)\right)}$$

$$= \frac{\rho\left(a - c_1\right) - \frac{2dX_0}{(1-\alpha)}}{\frac{\rho^2}{4m}\left(1 - \delta\right)}$$

$$= -\frac{\rho\,(a - c_1) - \frac{2dX_0}{(1-\alpha)}}{\rho c_2 + \frac{2d}{(1-\alpha)}}$$

Finally:

$$\tilde{X}_\infty = \frac{c_1 - a + \frac{2dX_0}{\rho(1-\alpha)}}{c_2 + \frac{2d}{\rho(1-\alpha)}}$$

Now, from:

$$\dot{X} = -\frac{(1-\alpha)}{b(2-3\alpha)}\,(a - c_1 - z_1 + (c_2 - z_2)X)$$

It comes:

$$X = \tilde{X}_\infty + \left(X_0 - \tilde{X}_\infty\right)e^{r_2 t}$$

$$x = -r_2\left(X_0 - \tilde{X}_\infty\right)e^{r_2 t}$$

$$p + \theta = a + br_2\left(X_0 - \tilde{X}_\infty\right)e^{r_2 t}$$

With:

$$\left(\dot{p} + \dot{\theta}\right) > 0$$

$$r_2 = -\frac{(1-\alpha)}{b(2-3\alpha)}(c_2 - z_2)$$

$$= -\frac{(1-\alpha)}{b(2-3\alpha)}\frac{1}{m}\left(\frac{\rho}{2}\right)\left(\sqrt[2]{\delta} - 1\right)$$

$$r_2 = \left(\frac{\rho}{2}\right)\frac{(2-3\alpha)}{(3-4\alpha)}\left(1 - \sqrt[2]{1 + \frac{8}{\rho^2}\,(3-4\alpha)\,\frac{(1-\alpha)}{b(2-3\alpha)^2}\left(\frac{d}{(1-\alpha)} + \rho\frac{1}{2}c_2\right)}\right)$$

Note that for $\alpha = \frac{1}{2}$, $r_2 > -\infty$

For the carbon tax:

$$\theta = a - c_1 + c_2 X - V_p^{T\prime}(X) - 2bx$$

$$p = c(X) + bx + V_p^{T\prime}(X) = a - bx - \theta$$

The Bellman equation for the producers is:

$$\rho V_p^T(X) = \max_p \left\{ \left(p - c(X) - V_p^{T\prime}(X)\right) x(p + \theta(X)) \right\}$$

By derivation it comes:

$$\rho V_p^{T'}(X) = -\left(V_p^{T\prime\prime}(X) + c'(X)\right) x + \left(p - c(X) - V_p^{T\prime}(X)\right) x' \theta' (X)$$

However the FOC is

$$\left(p - c(X) - V_p^{T\prime}(X)\right) x' + x = 0$$

Hence:

$$-V_p^{T\prime\prime}(X) x = +\rho V_p^{T\prime}(X) + \left(c'(X) + \theta'(X)\right) x$$

Or:

$$\rho V_p^{T\prime}(X) = \dot{V}_p^{T\prime}(X) + \dot{\theta} + c_2 x$$

But by derivation of:

$$p = c(X) + bx + V_p^{T\prime}(X) = a - bx - \theta$$

$$\dot{V}_p^{T\prime}(X) + \dot{\theta} + c_2 x = 2b\ddot{X}$$

$$\Rightarrow \rho V_p^{T\prime}(X) = 2b\ddot{X}$$

Then:

$$\theta = a - c_1 + c_2 X - 2b\ddot{X}\frac{1}{\rho} + 2b\dot{X}$$

That is:

$$\theta = a - c_1 + c_2 \tilde{X}_\infty + \left(X_0 - \tilde{X}_\infty\right) e^{r_2 t} \left(c_2 + 2br_2 - \frac{2br_2^2}{\rho}\right)$$

However:

$$\tilde{\theta}_{\infty} = \frac{2d}{\rho(1-\alpha)}\left(X_0 - \tilde{X}_{\infty}\right) = a - c_1 + c_2\tilde{X}_{\infty}$$

$$\Rightarrow \theta = \left(X_0 - \tilde{X}_{\infty}\right)[e^{r_2 t}\left(c_2 + 2br_2 - \frac{2br_2^2}{\rho}\right) + \frac{2d}{\rho(1-\alpha)}]$$

It implies in particular that:

$$\theta(0) = \left(X_0 - \tilde{X}_{\infty}\right)[\left(c_2 + 2br_2 - \frac{2br_2^2}{\rho}\right) + \frac{2d}{\rho(1-\alpha)}]$$

But:

$$c_2 + \frac{2d}{\rho(1-\alpha)} = [(3-4\alpha)br_2^2 - \rho b(2-3\alpha)r_2]\frac{1}{\rho(1-\alpha)}$$

Then:

$$\theta(0) = \left(X_0 - \tilde{X}_{\infty}\right)\frac{1}{(1-\alpha)}\left(\alpha br_2 + \frac{br_2^2}{\rho}(1-2\alpha)\right)$$

$$\theta(0) = \frac{bx_0}{(1-\alpha)}\left(-\alpha - \frac{r_2}{\rho}(1-2\alpha)\right)$$

NB: there is another way to work out the carbon tax. Use the maximized Bellman equation:

$$\rho V_B^T(X) = nbr_2^2\left(X - \tilde{X}_{\infty}\right)^2\left(\frac{1}{2} - \alpha\right) - nd(X_0 - X)^2$$

$$\Rightarrow \rho V_B^{T'}(X) = nbr_2^2\left(X - \tilde{X}_{\infty}\right)(1-2\alpha) - 2nd(X - X_0)$$

However:

$$\theta = \frac{1}{n(1-\alpha)}\left(V_B^{T\prime}(X) - n\alpha bx\right)$$

Then:

$$\theta = \frac{1}{(1-\alpha)}\left[-\frac{2d(X-X_0)}{\rho} - bx\left(\alpha + \frac{r_2}{\rho}(1-2\alpha)\right)\right]$$

III.A.2 r_2 is decreasing with the rate of transfer

We have:

$$(3-4\alpha)br_2^2 - \rho b(2-3\alpha)r_2 - 2d - \rho(1-\alpha)c_2 = 0$$

It implies:

$$\frac{\partial r_2}{\partial \alpha} = \frac{4br_2^2 - 3\rho b r_2 - \rho c_2}{(3-4\alpha)\, 2br_2 - \rho b\,(2-3\alpha)} = \frac{N}{D}$$

$$= \frac{1}{(3-4\alpha)} \frac{4\,(\rho b\,(2-3\alpha)\, r_2 + 2d + \rho\,(1-\alpha)\, c_2) - (3\rho b r_2 + \rho c_2)\,(3-4\alpha)}{[(3-4\alpha)\, 2br_2 - \rho b\,(2-3\alpha)]}$$
$$= \frac{1}{(3-4\alpha)} \frac{(-\rho b r_2 + 8d + \rho c_2)}{[(3-4\alpha)\, 2br_2 - \rho b\,(2-3\alpha)]}$$

$D < 0$. $N > 0$

$$\frac{\partial r_2}{\partial \alpha} < 0$$

III.A.3 Carbon tax

III.A.3.1 Initial value

$$\theta\,(0) = \frac{bx_0}{(1-\alpha)} \left(-\alpha - \frac{r_2}{\rho}\,(1-2\alpha)\right)$$

$$\theta\,(0) > 0 \Leftrightarrow r_2 < \frac{-\rho\alpha}{1-2\alpha}$$

When $\alpha = 0$, $r_2 < \frac{-\rho\alpha}{1-2\alpha}$ is verified, as $r_2 < 0$. When $\alpha \to \frac{1}{2}, r_2 > -\infty$ and$\frac{-\rho\alpha}{1-2\alpha} \longrightarrow -\infty$. Hence, when the rate of transfer is near zero the initial carbon tax is positive, when it tends towards $\frac{1}{2}$ it is negative. Note also that $\frac{\partial r_2}{\partial \alpha} < 0$.

As$\frac{-\rho\alpha}{1-2\alpha}$ is a decreasing function of α, there must be a value of α, $\breve{\alpha}$, where there is a switch of the sign of the initial carbon tax. This value is depending on damage and is such that:

$$r_{2(\breve{\alpha})} = \frac{-\rho\breve{\alpha}}{1-2\breve{\alpha}}$$

When the rate of transfer tends towards $\frac{1}{2}$, the burden of the transfer is so high on area B that the regulator of the area must subsidize oil consumption at date zero.

We can use simulation to examine how the value of the initial carbon tax depends on the rate of transfer. Let'use the same parameters as those used by Liski and

Tahvonen to make easy comparisons , adding of course values for the rate of transfer and for the number of financing countries.

Simulation shows that with our values of parameters for every rate of transfer (that is even for $\alpha > \breve{\alpha}$) the initial carbon tax is decreasing with the rate of transfer. For instance:

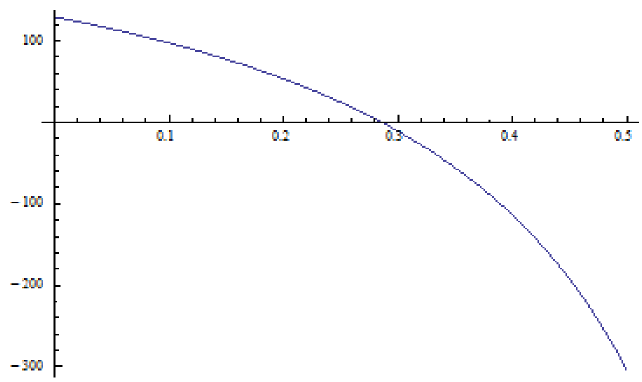

Figure III.22: $n = 0.4, d = 0.004, \theta\left(0\right)$ as a function of the rate of transfer

III.A.3.2 Variation with time

$$\dot{\theta} = r_2 \left(X_0 - \tilde{X}_\infty\right) e^{r_2 t} \left(c_2 + 2br_2 - \frac{2br_2^2}{\rho}\right)$$

Then:

$$\dot{\theta} > 0 \Leftrightarrow \left(c_2 + 2br_2 - \frac{2br_2^2}{\rho}\right) < 0$$

Using the equation of the second degree giving r_2:

$$\left(c_2 + 2br_2 - \frac{2br_2^2}{\rho}\right) = \frac{1}{(3-4\alpha)} \left(2br_2\left(1-\alpha\right) + c_2\left(1-2\alpha\right) - \frac{4d}{\rho}\right)$$

$$\dot{\theta} > 0 \Leftrightarrow 2br_2\left(1-\alpha\right) + c_2\left(1-2\alpha\right) - \frac{4d}{\rho} < 0$$

$$\Leftrightarrow 2br_2 < \frac{-c_2\left(1-2\alpha\right) + \frac{4d}{\rho}}{\left(1-\alpha\right)}$$

We have to compare:

$$2br_2 \text{ and } \frac{-c_2\left(1-2\alpha\right)+\frac{4d}{\rho}}{(1-\alpha)}$$

The LHS is decreasing with α, the RHS is increasing with α. Hence let's look at the values for $\alpha = 0$:

$$2b(r_2)_{\alpha=0} = 2b\left(\frac{\rho}{3}\right)\left(1-\sqrt[2]{1+\frac{6d}{b\rho^2}+\frac{3c_2}{b\rho}}\right) \text{ and } \left(-c_2+\frac{4d}{\rho}\right)$$

Consider one moment these expressions as functions of d. When $d = 0$:

$$\frac{2b\rho}{3}\left(1-\sqrt[2]{1+\frac{3c_2}{b\rho}}\right) > -c_2$$

When $d \to \infty$:

$$\frac{2b\rho}{3}\left(1-\sqrt[2]{1+\frac{6d}{b\rho^2}+\frac{3c_2}{b\rho}}\right) < \left(-c_2+\frac{4d}{\rho}\right)$$

As the LHS is monotonoulsly decreasing with d and the RHS is increasing with d, there is one value of the damage where there is a switch: call it d_1.

Hence:

$$d < d_1 \Leftrightarrow 2b(r_2)_{\alpha=0} > -c_2+\frac{4d}{\rho}$$

$$d > d_1 \Leftrightarrow 2b(r_2)_{\alpha=0} < -c_2+\frac{4d}{\rho}$$

With d_1 such that:

$$\frac{2b\rho}{3}\left(1-\sqrt[2]{1+\frac{6d_1}{b\rho^2}+\frac{3c_2}{b\rho}}\right) = \left(-c_2+\frac{4d_1}{\rho}\right)$$

If $d < d_1$, there is a value of α between zero and $\frac{1}{2}$, $\tilde{\alpha}$, such that:

$$\begin{aligned} \alpha &< \tilde{\alpha} \Leftrightarrow \dot{\theta} < 0 \\ \alpha &> \tilde{\alpha} \Leftrightarrow \dot{\theta} > 0 \end{aligned}$$

With $\tilde{\alpha}$ such that:

$$2br_{2(\tilde{\alpha})} = \frac{-c_2 (1 - 2\tilde{\alpha}) + \frac{4d}{\rho}}{(1 - \tilde{\alpha})}$$

If $d > d_1$, whatever the rate of transfer:

$$\dot{\theta} > 0$$

III.A.3.3 Mixing the evolution with time and the initial value

Firstly, $\tilde{\theta}_\infty > 0$: when time is sufficiently high, the carbon tax is or becomes always positive. Then let's note that:

$$\theta(0) = \left(X_0 - \tilde{X}_\infty\right) [\left(c_2 + 2br_2 - \frac{2br_2^2}{\rho}\right) + \frac{2d}{\rho(1-\alpha)}]$$

$$\dot{\theta} = r_2 \left(X_0 - \tilde{X}_\infty\right) e^{r_2 t} \left(c_2 + 2br_2 - \frac{2br_2^2}{\rho}\right)$$

Hence:

$$\begin{aligned} \dot{\theta} &< 0 \Rightarrow \theta(0) > 0 \\ \theta(0) &< 0 \Rightarrow \dot{\theta} > 0 \end{aligned}$$

It comes that if $d > d_1$ that the carbon tax is always increasing with time, its initial value being positive if $\alpha < \breve{\alpha}$ and negative if $\alpha > \breve{\alpha}$.

If $d < d_1$ [20]: when $\alpha < \tilde{\alpha}$ the carbon tax is decreasing with time but its initial value is positive and it remains always positive; when $\tilde{\alpha} < \alpha < \breve{\alpha}$ both initial value

[20] In this case $\breve{\alpha} > \tilde{\alpha}$. Indeed: $\alpha > \breve{\alpha} \Rightarrow \dot{\theta} > 0 \Rightarrow \alpha > \tilde{\alpha}$.

and derivative with time are positive; when $\alpha > \breve{\alpha}$ the carbon tax is increasing with time and its initial value is negative. It implies in particular that the carbon tax is always positive if $\alpha < \breve{\alpha}$, whatever the damage.

III.A.4 Evolution with time of the producer price

As far as the producer price is concerned:

$$p = a + b\dot{X} - \theta$$

$$\dot{p} = b\ddot{X} - \dot{\theta}$$

Note first that:

$$\dot{\theta} < 0 \Rightarrow \dot{p} > 0$$

That is:

$$\begin{aligned} (\ d &< d_1 \text{ and } \alpha < \tilde{\alpha}) \\ &\Rightarrow \dot{p} > 0 \end{aligned}$$

It's also true that:

$$\dot{p} < 0 \Rightarrow \dot{\theta} > 0$$

We have:

$$\begin{aligned} p &= a + b\dot{X} - \theta \\ &= c_1 - c_2\tilde{X}_\infty + \left(X_0 - \tilde{X}_\infty\right) e^{r_2 t} \left(-c_2 - br_2 + \frac{2br_2^2}{\rho}\right) \end{aligned}$$

Of course:

$$p\left(0\right) = c_1 - c_2 X_0 + \left(X_0 - \tilde{X}_\infty\right) \left(-br_2 + \frac{2br_2^2}{\rho}\right) > 0$$

And:

$$\dot{p} = r_2 \left(X_0 - \tilde{X}_\infty \right) e^{r_2 t} \left(-c_2 - br_2 + \frac{2br_2^2}{\rho} \right)$$

Using the same method as for the carbon tax:

$$\dot{p} = r_2 \left(X_0 - \tilde{X}_\infty \right) e^{r_2 t} \left(\frac{(1-2\alpha)(-c_2 + br_2) + \frac{4d}{\rho}}{(3-4\alpha)} \right)$$

The sign of the derivative of the producer price depends on:

$$M = (1-2\alpha)(-c_2 + br_2) + \frac{4d}{\rho}$$

Let's compare br_2 and $c_2 - \frac{4d}{\rho(1-2\alpha)}$.

When $\alpha = 0$, we have to compare :

$$br_{2(\alpha=0)} and c_2 - \frac{4d}{\rho}$$

Look at their evolution with d. When $d = 0$:

$$br_{2(\alpha=0)} < 0 < c_2$$

Both $br_{2(\alpha=0)}$ and $c_2 - \frac{4d}{\rho}$ decrease with d but the first with $\sqrt[2]{d}$ and the second with d. Hence it exists d_2 such that:

$$d < d_2 \Rightarrow br_{2(\alpha=0)} < c_2 - \frac{4d}{\rho}$$

$$d > d_2 \Rightarrow br_{2(\alpha=0)} > c_2 - \frac{4d}{\rho}$$

$$\text{with } \frac{b\rho}{3} \left(1 - \sqrt[2]{1 + \frac{6d_2}{b\rho^2} + \frac{3c_2}{b\rho}} \right) = \left(c_2 - \frac{4d_2}{\rho} \right)$$

Note that $d_2 > d_1$

Looking now at the variation with α, both br_2 and $c_2 - \frac{4d}{\rho(1-2\alpha)}$ are decreasing with α, but $br_{2\left(\alpha=\frac{1}{2}\right)} > -\infty$ while $c_2 - \frac{4d}{\rho(1-2\alpha)} \to -\infty$. Hence:

$$\begin{aligned} d &< d_2 \Rightarrow \text{ there exists } \hat{\alpha} < \frac{1}{2} \text{ with:} \\ \alpha &< \hat{\alpha} \Longrightarrow \dot{p} > 0 \\ \alpha &> \hat{\alpha} \Longrightarrow \dot{p} < 0 \end{aligned}$$

Note that $\tilde{\alpha} \leq \hat{\alpha}$[21].

When $d > d_2$, it is sure that if damage is sufficient "high" $br_2 > c_2 - \frac{4d}{\rho(1-2\alpha)}$, whatever the value of α.In all cases where $d > d_2$ it is sure that $\dot{p} < 0$ when α is near zero or near $\frac{1}{2}$. However, in some intermediate cases for $d > d_2$ but not too "high", it cannot be ruled out a priori from an analytical standpoint that it exists, say α_1 and α_2, such that:

$$\alpha_1 < \alpha < \alpha_2 \Rightarrow \dot{p} > 0$$

With simuation this peculiar case can be ruled out.

III.A.5 Evolution of the initial oil consumption with the rate of transfer

$$\begin{aligned} x_0 &= -r_2\left(X_0 - \tilde{X}_\infty\right) \\ &\Rightarrow \frac{\partial x_0}{\partial \alpha} = r_2 \frac{\partial \tilde{X}_\infty}{\partial \alpha} - \frac{\partial r_2}{\partial \alpha}\left(X_0 - \tilde{X}_\infty\right) \end{aligned}$$

[21] If $\tilde{\alpha} > \hat{\alpha}$ consider α such that:

$$\tilde{\alpha} > \alpha > \hat{\alpha}$$

with $d < d_1 < d_2$, then $\dot{p} < 0 \Longrightarrow \dot{\theta} > 0$, but this possible only if

$$\alpha > \tilde{\alpha}$$

Thus a contradiction.

We have:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \tilde{X}_\infty}{\partial \alpha} &= \left(X_0 - \tilde{X}_\infty\right) \frac{1}{\left(1-\alpha+\frac{\rho c_2 (1-\alpha)^2}{2d}\right)} \\ \frac{\partial r_2}{\partial \alpha} &= \frac{1}{(3-4\alpha)} \frac{(-\rho b r_2 + 8d + \rho c_2)}{[(3-4\alpha)\,2br_2 - \rho b\,(2-3\alpha)]}\end{aligned}$$

After some calculus:

$$\begin{aligned}\frac{\partial x_0}{\partial \alpha} &= \frac{\left(X_0 - \tilde{X}_\infty\right)}{(3-4\alpha)\,[(3-4\alpha)\,2br_2 - \rho b\,(2-3\alpha)]} * \frac{1}{\left(1-\alpha+\frac{\rho c_2(1-\alpha)^2}{2d}\right)} \\ * & \left[\begin{array}{c} \rho b r_2 \left(\frac{\rho c_2 (1-\alpha)^2}{2d} + 7 - 18\alpha + +12\alpha^2\right) + \rho c_2\,(1-\alpha)\,(1-4\alpha) \\ -\frac{\rho^2 c_2^2 (1-\alpha)^2}{2d} + 4d\,(1-2\alpha) \end{array}\right]\end{aligned}$$

The expression with brackets at the numerator is complicated.

However it is sure that when the rate of transfer is near $\frac{1}{2}$ the derivative is always positive:

$$\left(\frac{\partial x_0}{\partial \alpha}\right)_{\alpha=\frac{1}{2}} = \left(\frac{X_0 - \tilde{X}_\infty}{D<0}\right)\left[\rho b r_2 \left(\frac{\rho c_2}{8d} + 1\right) - \frac{1}{2}\rho c_2 - \frac{\rho^2 c_2^2}{8d}\right] > 0$$

When damage is zero or near it and when the rate of transfer is zero or near it, $\frac{\partial x_0}{\partial \alpha}$ is equivalent to:

$$\sim \left(\frac{X_0 - \tilde{X}_\infty}{D<0}\right)[\rho b r_2 \left(\frac{\rho c_2}{2d}\right) - \frac{\rho^2 c_2^2}{2d}] > 0$$

In this case, the initial oil consumption is increasing with the rate of transfer at zero and near zero by continuity.

Simulation confirms and extends these results for our values of parameters: the initial oil consumption is increasing with the rate of transfer when $d <\sim 0.02$[22]. For $d >\sim 0.02$, simulation shows that for small and intermediate values of the rate of transfer the initial oil consumption is decreasing with the rate of transfer and it confirms that for values near $\frac{1}{2}$ it is increasing.

[22] This limit value does not really change when going from $n = 0.4$ to $n = 0.7$.

III.A.6 Area B payoff

$$\frac{\partial\left(\rho V_B^T(X_0)\right)}{\partial\alpha} = nb\left(X_0-\tilde{X}_\infty\right)\left[\left(-r_2^2+r_2\left(1-2\alpha\right)\frac{\partial r_2}{\partial\alpha}\right)\left(X_0-\tilde{X}_\infty\right)-2r_2^2\left(\frac{1}{2}-\alpha\right)\frac{\partial\tilde{X}_\infty}{\partial\alpha}\right]$$

$$\left(-r_2+\left(1-2\alpha\right)\frac{\partial r_2}{\partial\alpha}\right)>0\Rightarrow\frac{\partial\left(\rho V_B^T(X_0)\right)}{\partial\alpha}<0$$

After some calculus it comes:

$$\left(-r_2+\left(1-2\alpha\right)\frac{\partial r_2}{\partial\alpha}\right)=\frac{-2br_2^2+\rho br_2\left(3\alpha-1\right)-\left(1-2\alpha\right)\rho c_2}{\left(3-4\alpha\right)2br_2-\rho b\left(2-3\alpha\right)}$$

Hence:

$$\frac{1}{2}>\alpha>\frac{1}{3}\Rightarrow\frac{\partial\left(\rho V_B^T(X_0)\right)}{\partial\alpha}<0$$

III.A.7 Payoff of area A

$$V_A^T\left(X_0\right)=\left(1-n\right)\int_0^\infty\left(u\left(x_T\right)-p_Tx_T\right)e^{-\rho t}dt+\int_0^\infty\alpha n\theta_Tx_Te^{-\rho t}dt$$

$$p_T=a-bx_T-\theta_T$$

Then:

$$V_A^T\left(X_0\right)=\left(1-n\right)\int_0^\infty\left(\frac{b}{2}x_T^2\right)e^{-\rho t}dt+\int_0^\infty\left(\alpha n+1-n\right)\theta_Tx_Te^{-\rho t}dt$$

Let's note that:

$$\int_0^\infty\left(\frac{b}{2}x_T^2\right)e^{-\rho t}dt=\frac{b}{2}\frac{r_2^2\left(X_0-\tilde{X}_\infty\right)^2}{\rho-2r_2}$$

$$\text{with: } X_0-\tilde{X}_\infty=\frac{a-c_1+c_2X_0}{c_2+\frac{2d}{\rho n(1-\alpha)}}$$

And also that:

$$\theta_T x_T = -r_2 \left(X_0 - \tilde{X}_\infty\right) e^{r_2 t} \left[a - c_1 + c_2 X_T - 2b x_T - 2b \frac{\ddot{X}_T}{\rho}\right]$$

$$= -r_2 \left(X_0 - \tilde{X}_\infty\right) e^{r_2 t} \left[\begin{array}{c} a - c_1 + c_2 \left(X_0 - \tilde{X}_\infty\right) e^{r_2 t} + c_2 \tilde{X}_\infty + 2b r_2 \left(X_0 - \tilde{X}_\infty\right) e^{r_2 t} \\ -2b \frac{1}{\rho} r_2^2 \left(X_0 - \tilde{X}_\infty\right) e^{r_2 t} \end{array} \right]$$

$$V_A^T (X_0) = (1 - n) \frac{b}{2} \frac{r_2^2 \left(X_0 - \tilde{X}_\infty\right)^2}{\rho - 2r_2}$$

$$- (\alpha n + 1 - n) r_2 \left(X_0 - \tilde{X}_\infty\right) \left[\begin{array}{c} \frac{a - c_1}{\rho - r_2} + \frac{c_2 \left(X_0 - \tilde{X}_\infty\right)}{\rho - 2r_2} + \frac{c_2 \tilde{X}_\infty}{\rho - r_2} \\ + \frac{2b r_2 \left(X_0 - \tilde{X}_\infty\right)}{(\rho - 2r_2)} - \frac{2b r_2^2 \left(X_0 - \tilde{X}_\infty\right)}{\rho (\rho - 2r_2)} \end{array} \right]$$

However:

$$a - c_1 + c_2 \tilde{X}_\infty = \frac{2d}{\rho (1 - \alpha)} \left(X_0 - \tilde{X}_\infty\right)$$

Then:

$$V_A^T (X_0) = (1 - n) \frac{b}{2} \frac{r_2^2 \left(X_0 - \tilde{X}_\infty\right)^2}{\rho - 2r_2}$$

$$- (\alpha n + 1 - n) r_2 \left(X_0 - \tilde{X}_\infty\right)^2 \left[\frac{2d}{\rho (1 - \alpha) (\rho - r_2)} + \frac{c_2 + 2b r_2 - 2b r_2^2 \left(\frac{1}{\rho}\right)}{(\rho - 2r_2)} \right]$$

It's possible to go further when the rate of transfer is equal to zero (or very near it) and when damage is equal to zero (or very near it). Our aim here is to see if in this area:

$$\left. \frac{\partial V_A^T (X_0)}{\partial \alpha} \right|_{d=0; \alpha=0} > 0$$

A manageable way to do do this is to note that:

$$\begin{aligned} V_B^T(X_0) &= n\int_0^\infty \left(\frac{b}{2}x_T^2\right)e^{-\rho t}dt + \int_0^\infty n(1-\alpha)\theta_T x_T e^{-\rho t}dt - n\int_0^\infty d\left(X-X_0\right)^2 e^{-\rho t}dt \\ &= \left(\frac{1}{\rho}\right) nb(x_0^2)_T(\frac{1}{2}-\alpha) \end{aligned}$$

Hence:

$$\int_0^\infty \theta_T x_T e^{-\rho t}dt = \frac{1}{n(1-\alpha)}\left[\left(\frac{1}{\rho}\right)nb(x_0^2)_T(\frac{1}{2}-\alpha) - n\int_0^\infty\left(\frac{b}{2}x_T^2\right)e^{-\rho t}dt + n\int_0^\infty d\left(X-X_0\right)^2 e^{-\rho t}dt\right]$$

And:

$$\begin{aligned} V_A^T(X_0) &= (1-n)\int_0^\infty\left(\frac{b}{2}x_T^2\right)e^{-\rho t}dt \\ &+\frac{(\alpha n+1-n)}{n(1-\alpha)}\left[\left(\frac{1}{\rho}\right)nb(x_0^2)_T(\frac{1}{2}-\alpha) - n\int_0^\infty\left(\frac{b}{2}x_T^2\right)e^{-\rho t}dt + \int_0^\infty nd\left(X-X_0\right)^2 e^{-\rho t}dt\right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_A^T(X_0) &= -\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)\int_0^\infty\left(\frac{b}{2}x_T^2\right)e^{-\rho t}dt \\ &+\frac{(\alpha n+1-n)}{(n(1-\alpha))}\left[\left(\frac{1}{\rho}\right)nb(x_0^2)_T(\frac{1}{2}-\alpha) + \int_0^\infty nd\left(X-X_0\right)^2 e^{-\rho t}dt\right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_A^T(X_0) &= \frac{b(x_0^2)_T}{2\left(1-\alpha\right)}\left[-\frac{\alpha}{\rho-2r_2}+\left(\frac{1}{\rho}\right)\left(\alpha n+1-n\right)\left(1-2\alpha\right)\right] \\ &+\frac{(\alpha n+1-n)}{(n(1-\alpha))}\int_0^\infty nd\left(X-X_0\right)^2 e^{-\rho t}dt \end{aligned}$$

When $d=0$ or near it, the last term will give no derivative with respect to α different from zero. Hence after some calculus :

$$\frac{\partial V_A^T(X_0)}{\partial\alpha}_{d=0;\alpha=0} = \frac{b(x_0^2)_T}{2}\left[-\frac{1}{\rho-2r_2}+\left(\frac{1}{\rho}\right)(3n-2)\right]+\left(\frac{1-n}{\rho}\right)\left[\frac{b(x_0^2)_T}{2}+b\left(x_0\right)_T\frac{\partial\left(\left(x_0\right)_T\right)}{\partial\alpha}_{d=0;\alpha=0}\right]$$

$$\left.\frac{\partial V_A^T\left(X_0\right)}{\partial \alpha}\right|_{d=0;\alpha=0}=\frac{b(x_0^2)_T}{2}\left[-\frac{1}{\rho-2r_2}+\left(\frac{1}{\rho}\right)(2n-1)\right]+\left(\frac{1}{\rho}\right)(1-n)\left[b\left(x_0\right)_T\left.\frac{\partial\left(\left(x_0\right)_T\right)}{\partial \alpha}\right|_{d=0;\alpha=0}\right]$$

Now, as damage is near zero, from Appendix III.A.5:

$$\begin{aligned}\left.\frac{\partial\left(\left(x_0\right)_T\right)}{\partial \alpha}\right|_{d=0;\alpha=0} &\sim \left(\frac{X_0-\tilde{X}_\infty}{(3)\left[6br_2-2\rho b\right]}\right)*\left[\rho br_2-\rho c_2\right]\\ &= \left(\frac{(x_0)_T}{-(3)\left[6br_2^2-2\rho br_2\right]}\right)*\left[\rho br_2-\rho c_2\right]\end{aligned}$$

Hence:

$$\left.\frac{\partial V_A^T\left(X_0\right)}{\partial \alpha}\right|_{d=0;\alpha=0}\sim\frac{b(x_0^2)_T}{2\rho}\left[+\frac{\rho}{2r_2-\rho}+(2n-1)+2\left(\frac{(1-n)\left(\rho br_2-\rho c_2\right)}{-(3)\left[6br_2^2-2\rho br_2\right]}\right)\right]$$

The expression within bracket is equal to:

$$\frac{\left(\rho+\left(2r_2-\rho\right)(2n-1)\right)(-3)\left[6br_2^2-2\rho br_2\right]+2\left(2r_2-\rho\right)(1-n)\left(\rho br_2-\rho c_2\right)}{\left(2r_2-\rho\right)(-3)\left[6br_2^2-2\rho br_2\right]}=\frac{N}{D}$$

$D>0$. As far as N is concerned:

$$\begin{aligned}N &= -36(2n-1)br_2^3+br_2^2\left(-18\left(2\rho-2\rho n\right)+12\rho(2n-1)+4(1-n)\rho\right)\\ &\quad +r_2\left(6b\rho^2(2-2n)+2(1-n)\left(-\rho^2 b-2\rho c_2\right)\right)+2(1-n)\rho^2 c_2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}N &= -36(2n-1)br_2^3+\rho br_2^2(-44+56n)\\ &\quad +\rho(1-n)\left(10\rho b-4c_2\right)r_2+2(1-n)\rho^2 c_2\end{aligned}$$

However if $\alpha=0$ and $d=0$:

$$3br_2^2-2\rho br_2-\rho c_2=0$$

Hence:

$$\begin{aligned} N &= -36\,(2n-1)\,br_2^3 + \rho br_2^2\,(-44+56n) + \\ &\quad \rho\,(1-n)\left(15br_2^2 - 9c_2r_2\right) + 2\,(1-n)\,\rho^2 c_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N &= -36\,(2n-1)\,br_2^3 + \rho br_2^2\,(-29+41n) \\ &\quad -9c_2r_2\rho\,(1-n) + 2\,(1-n)\,\rho^2 c_2 \end{aligned}$$

If $n > \frac{29}{41} \sim 0.7$, $N > 0$ and:

$$\left.\frac{\partial V_A^T\,(X_0)}{\partial \alpha}\right|_{d=0;\alpha=0} > 0$$

In this case $V_A^T\,(X_0)$ is increasing with the rate of transfer at the beginning. We know also that, when the rate of transfer is near half $V_A^T\,(X_0)$ becomes negative if damage is near zero; indeed from above:

$$V_A^T\,(X_0) \sim \frac{b(x_0^2)_T}{(1)}\left[-\frac{\frac{1}{2}}{\rho - 2r_2}\right]$$

This payoff being a continuous function there is a maximum for it relative to the rate of transfer (when damage is zero or near it).

III.B The Stackelberg equilibrium

III.B.1 The equilibrium

Let's note;

$$Z = V_p^S(X) + \frac{V_B^S(X)}{n\,(1-\alpha)}$$

$$\Rightarrow Z' = V_p^{S\prime}(X) + \frac{V_B^{S\prime}(X)}{n\,(1-\alpha)}$$

Hence:

$$\rho Z = [\frac{(1-\alpha)}{2b(3-4\alpha)} + \frac{(1-\alpha)^2}{b(3-4\alpha)^2}] \left(a - c_1 + c_2 X - Z^{'}\right)^2$$

$$-\frac{d\,(X_0 - X)^2}{(1-\alpha)}$$

$$\rho Z = (1-\alpha)\,\frac{(5-6\alpha)}{2b(3-4\alpha)^2}\left(a - c_1 + c_2 X - Z^{'}\right)^2$$

$$-\frac{d\,(X_0 - X)^2}{(1-\alpha)}$$

Looking for quadratic solutions:

$$Z = z_0 + z_1 X + \frac{1}{2} z_2 X^2$$

$$\Rightarrow Z^{'} = z_1 + z_2 X$$

Let's note:

$$l = (1-\alpha)\,\frac{(5-6\alpha)}{b(3-4\alpha)^2}$$

Formally we find the same equations as in the MPNE, but with l instead of m:

$$\rho\frac{1}{2} z_2 = \frac{1}{2} l\,(c_2 - z_2)^2 - \frac{d}{(1-\alpha)}$$

Or:

$$\frac{1}{2} l\,(c_2 - z_2)^2 - \rho\frac{1}{2}(z_2 - c_2) - \frac{d}{(1-\alpha)} - \rho\frac{1}{2} c_2 = 0$$

The discriminant is:

$$\frac{\rho^2}{4} + 2l\left(\frac{d}{(1-\alpha)} + \rho\frac{1}{2} c_2\right) = \frac{\rho^2}{4}\phi$$

Note that: $\phi > 1$

And:

$$\phi = \frac{8l}{\rho^2}\left(\frac{d}{(1-\alpha)} + \rho\frac{1}{2}c_2\right) + 1$$

$$= \frac{8}{\rho^2}(1-\alpha)\frac{(5-6\alpha)}{b(3-4\alpha)^2}\left(\frac{d}{(1-\alpha)\,l} + \rho\frac{1}{2}c_2\right) + 1$$

Hence:

$$z_2 - c_2 = \frac{1}{l}\left(\frac{\rho}{2}\right)\left(1 \pm \sqrt[2]{\phi}\right)$$

We can select the right root. Note that:

$$\dot{X} = -x = -\frac{(1-\alpha)}{b(3-4\alpha)}\left(a - c_1 - z_1 + (c_2 - z_2)X\right)$$

For the solution of this differential equation to converge, it is necessary that:

$$c_2 - z_2 > 0$$

$$\Rightarrow z_2 - c_2 = \frac{1}{l}\left(\frac{\rho}{2}\right)\left(1 - \sqrt[2]{\phi}\right)$$

Also by identification:

$$\rho z_1 = l\,(c_2 - z_2)\,(a - c_1 - z_1) + \frac{2dX_0}{(1-\alpha)}$$

$$\Rightarrow z_1 = \frac{l\,(c_2 - z_2)\,(a - c_1) + \frac{2dX_0}{(1-\alpha)}}{\rho + l\,(c_2 - z_2)}$$

As in the MPNE, using $\lim_{t\to\infty} x = 0$, one finds:

$$\tilde{X}_\infty = -\frac{a - c_1 - z_1}{c_2 - z_2} = \frac{c_1 - a + \frac{2dX_0}{\rho(1-\alpha)}}{c_2 + \frac{2d}{\rho(1-\alpha)}}$$

Final oil stock is the same in the "S" equilibrium and in the "T" equilibrium. The difference is in the path to this same final value.

$$X = \tilde{X}_\infty + \left(X_0 - \tilde{X}_\infty\right)e^{s_2 t}$$

$$x = -s_2 \left(X_0 - \tilde{X}_\infty \right) e^{s_2 t}$$

$$p + \theta = a + b s_2 \left(X_0 - \tilde{X}_\infty \right) e^{s_2 t}$$

$$\left(\dot{p} + \dot{\theta} \right) > 0$$

with:

$$s_2 = -\frac{(1-\alpha)}{b(3-4\alpha)}(c_2 - z_2)$$

$$= \frac{(1-\alpha)}{b(3-4\alpha)} \frac{1}{l} \left(\frac{\rho}{2}\right) \left(1 - \sqrt[2]{\phi}\right)$$

$$= \frac{(3-4\alpha)}{(5-6\alpha)} \left(\frac{\rho}{2}\right) \left(1 - \sqrt[2]{1 + \frac{8\,(1-\alpha)\,(5-6\alpha)}{\rho^2 b (3-4\alpha)^2} \left(\frac{d}{(1-\alpha)} + \rho \frac{1}{2} c_2\right)}\right)$$

Note that :

$$\alpha = 0$$

$$\Rightarrow s_2 = \left(\frac{3\rho}{10}\right) \left(1 - \sqrt[2]{1 + \frac{40d}{9b\rho^2} + \frac{20c_2}{9b\rho}}\right)$$

and note also that when $\alpha \to \frac{1}{2}, -\infty < s_2 < 0$.

III.B.2 Comparison of s_2 and r_2

$$(3-4\alpha)\, b r_2^2 - \rho b\,(2-3\alpha)\, r_2 - 2d - \rho\,(1-\alpha)\, c_2 = 0$$

and

$$(5-6\alpha)\, b s_2^2 - \rho b\,(3-4\alpha)\, s_2 - 2d - \rho\,(1-\alpha)\, c_2 = 0$$

Hence:

$$(3-4\alpha)\, b(r_2^2 - s_2^2) - \rho b\,(2-3\alpha)\,(r_2 - s_2)$$

$$= (1-\alpha)\,(2bs_2^2 - \rho b s_2) > 0$$

Therefore $s_2 < r_2 < 0$ would imply $s_2^2 > r_2^2$, but this would be impossible; hence $r_2 < s_2$ (equality is also impossible).

III.B.3 s_2 is decreasing with the rate of transfer:

$$\begin{aligned}\frac{\partial s_2}{\partial \alpha} &= \frac{(6bs_2^2 - 4b\rho s_2 - \rho c_2)}{2bs_2(5-6\alpha) - b\rho(3-4\alpha)} \\ &= \frac{-2b\rho s_2 + \rho c_2 + 12d}{(5-6\alpha)\left[2bs_2(5-6\alpha) - b\rho(3-4\alpha)\right]} < 0\end{aligned}$$

III.B.4 Carbon tax

III.B.4.1 Working it out

We have:

$$\begin{aligned}\rho V_B^S(X) &= nb(\frac{3}{2} - 2\alpha)x^2 - nd(X_0 - X)^2 \\ &= nbs_2^2\left(X - \tilde{X}_\infty\right)^2(\frac{3}{2} - 2\alpha) - nd(X_0 - X)^2\end{aligned}$$

Hence:

$$\rho V_B^{S,}(X) = 2nbs_2^2\left(X - \tilde{X}_\infty\right)(\frac{3}{2} - 2\alpha) + 2nd(X_0 - X)$$

Then:

$$\theta_S = \frac{1}{n(1-\alpha)}\left(V_B^{S,}(X) - nxb(2\alpha - 1)\right)$$

implies:

$$\theta_S = \frac{1}{(1-\alpha)}\left[\frac{1}{\rho}2d(X_0 - X) - bx\left(2\alpha - 1 + \frac{(3-4\alpha)s_2}{\rho}\right)\right]$$

It implies:

$$\left(\tilde{\theta}_S\right)_\infty = \frac{2d\left(X_0 - \tilde{X}_\infty\right)}{\rho(1-\alpha)} = \frac{2d(a - c_1 + c_2X_0)}{2d + \rho(1-\alpha)c_2}$$

Note also that the carbon tax can be written:

$$\theta_S = \frac{2d\left(X_0 - \tilde{X}_\infty\right)}{\rho\left(1-\alpha\right)} + e^{s_2 t}\left(X_0 - \tilde{X}_\infty\right)\left[-\frac{2d}{\rho(1-\alpha)} + \left(\frac{1}{1-\alpha}\right)bs_2\left(2\alpha - 1 + \frac{\left(3-4\alpha\right)s_2}{\rho}\right)\right]$$

From:

$$\left(5-6\alpha\right)bs_2^2 = \rho b\left(3-4\alpha\right)s_2 + 2d + \rho\left(1-\alpha\right)c_2 > 0$$

it comes:

$$(2\alpha-1)bs_2 + \frac{\left(3-4\alpha\right)bs_2^2}{\rho} = 2b\left(\alpha-1\right)\frac{s_2^2}{\rho} - 2b\left(\alpha-1\right)s_2 + 2d + \left(1-\alpha\right)c_2$$

and then :

$$\theta_S = \left(X_0 - \tilde{X}_\infty\right)\left[\frac{2d}{\rho\left(1-\alpha\right)} + e^{s_2 t}\left(c_2 + 2bs_2 - \frac{2bs_2^2}{\rho}\right)\right]$$

It's formally the same expression as in the MPNE , but with s_2 instead of r_2.

III.B.4.2 Initial value of the carbon tax

$$\begin{aligned}
\theta_S\left(0\right) &= -\frac{bx_S\left(0\right)}{\left(1-\alpha\right)}\left(2\alpha - 1 + \frac{\left(3-4\alpha\right)s_2}{\rho}\right) \\
\theta_S\left(0\right) &= \frac{b\left(X_0 - \tilde{X}_\infty\right)}{\left(1-\alpha\right)}\left((2\alpha-1)s_2 + \frac{\left(3-4\alpha\right)s_2^2}{\rho}\right)
\end{aligned}$$

Simulations show that for our values of parameters the initial value is decreasing with the rate of transfer (see Figure III.12 for instance).

Note now that:

$$\begin{aligned}
\theta_T &= \frac{1}{\left(1-\alpha\right)}\left[-\frac{2d\left(X-X_0\right)}{\rho} - bx\left(\alpha + \frac{r_2}{\rho}\left(1-2\alpha\right)\right)\right] \\
\Rightarrow \quad \theta_T\left(0\right) &= \frac{b\left(X_0 - \tilde{X}_\infty\right)}{\left(1-\alpha\right)}\left(\alpha r_2 + \frac{r_2^2}{\rho}\left(1-2\alpha\right)\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\theta_S(0)-\theta_T(0) &= \frac{b\left(X_0-\tilde{X}_\infty\right)}{\rho(1-\alpha)}[(3-4\alpha)s_2^2+(2\alpha-1)\rho s_2 \\ &\quad -r_2^2(1-2\alpha)-\alpha\rho r_2]\end{aligned}$$

We know that:

$$(3-4\alpha)br_2^2-\rho b(2-3\alpha)r_2=(5-6\alpha)bs_2^2-\rho b(3-4\alpha)s_2$$

Hence:

$$\begin{aligned}\theta_S(0)-\theta_T(0) &= \frac{2b\left(X_0-\tilde{X}_\infty\right)}{\rho}(r_2-s_2)(r_2+s_2-\rho) \\ (r_2-s_2) &< 0 \\ &\Rightarrow \theta_S(0)>\theta_T(0)\end{aligned}$$

Furthermore:

$$(p)_T(0)-(p)_S(0)=\theta_S(0)-\theta_T(0)+b(x_S(0)-x_T(0))$$

$$\begin{aligned}(p)_T(0)-(p)_S(0) &= \frac{2b\left(X_0-\tilde{X}_\infty\right)}{\rho}(r_2-s_2)(r_2+s_2-\rho) \\ &\quad +b\left(X_0-\tilde{X}_\infty\right)(r_2-s_2) \\ &= b\left(X_0-\tilde{X}_\infty\right)(r_2-s_2)\left[-1+\frac{2}{\rho}(r_2+s_2)\right]>0\end{aligned}$$

$$\theta_S(0)=\frac{b\left(X_0-\tilde{X}_\infty\right)}{(1-\alpha)}\left((2\alpha-1)s_2+\frac{(3-4\alpha)s_2^2}{\rho}\right) \tag{III.95}$$

$$\theta_S(0) > 0 \Leftrightarrow s_2 < \frac{\rho(1-2\alpha)}{(3-4\alpha)} \tag{III.96}$$

When $\alpha = 0$, it's true. The LHS and the RHS are decreasing with the rate of transfer but $(\ s_2\ )_{\alpha=\frac{3}{4}} > -\infty$, while the RHS tends towards $-\infty$ when $\alpha \to \frac{3}{4}$: hence it exists $\frac{1}{2} < \breve{\alpha}$[23]$< \frac{3}{4}$ such that the initial carbon tax is positive before this value and negative after. In particular for $\alpha = \frac{1}{2.}$ the initial carbon tax is positive. And:

$$(s_2)_{\breve{\alpha}} = \frac{\rho(1-2\breve{\alpha})}{(3-4\breve{\alpha})} \tag{III.97}$$

III.B.4.3 Evolution with time of the carbon tax:

$$\begin{aligned}
\theta_S &= \frac{1}{(1-\alpha)}\left[\frac{1}{\rho}2d(X_0 - X) + b\left(X - \tilde{X}_\infty\right)s_2\left(2\alpha - 1 + \frac{(3-4\alpha)s_2}{\rho}\right)\right] \\
&\Rightarrow\ \dot{\theta}_S = \frac{\dot{X}}{(1-\alpha)\rho}\left[-2d + \rho b s_2(2\alpha-1) + b(3-4\alpha)s_2^2\right]
\end{aligned}$$

Let's use:

$$bs_2^2 = \frac{1}{(5-6\alpha)}[\rho b(3-4\alpha)s_2 + 2d + \rho(1-\alpha)c_2]$$

$$\dot{\theta}_S = \frac{\dot{X}}{(5-6\alpha)(1-\alpha)\rho}\left[\begin{array}{c}(-2d + \rho b s_2(2\alpha-1))(5-6\alpha) \\ +(3-4\alpha)(\rho b(3-4\alpha)s_2 + 2d + \rho(1-\alpha)c_2)\end{array}\right]$$

$$\begin{aligned}
\dot{\theta}_S &= \frac{\dot{X}}{(5-6\alpha)(1-\alpha)\rho}\left[2d(2\alpha-2) + 4\rho b s_2(\alpha-1)^2 + \rho(3-4\alpha)(1-\alpha)c_2\right] \\
\dot{\theta}_S &= \frac{\dot{X}}{(5-6\alpha)\rho}[-4d + 4\rho b s_2(1-\alpha) + \rho(3-4\alpha)c_2]
\end{aligned}$$

[23] That depends on damage

Hence:

$$\dot{\theta}_S > 0 \Leftrightarrow 4bs_2 < \frac{4d - \rho\,(3 - 4\alpha)\,c_2}{\rho(1-\alpha)}$$

When $\alpha = 0$ compare:

$$4b(s_2)_{\alpha=0} \text{ and } \frac{4d}{\rho} - 3c_2$$

Let's consider the LHS and the RHS as functions of damage: the LHS is decreasing with damage and the RHS is increasing with damage and tending towards $+\infty$ when damage becomes very severe. Furthermore if $d = 0$:

$$4b(s_2)_{\alpha=0,d=0} = \frac{6\rho b}{5}\left(1 - \sqrt[2]{1 + \frac{20c_2}{9\rho b}}\right) > -3c_2$$

Hence it exists d_3 such that:

$$\begin{aligned} d &< d_3 \Longleftrightarrow 4b(s_2)_{\alpha=0} > \frac{4d}{\rho} - 3c_2 \\ d &> d_3 \Longleftrightarrow 4b(s_2)_{\alpha=0} < \frac{4d}{\rho} - 3c_2 \end{aligned}$$

With:

$$\frac{6\rho b}{5}\left(1 - \sqrt[2]{1 + \frac{20c_2}{9\rho b} + \frac{40d_3}{9b\rho^2}}\right) = \frac{4d_3}{\rho} - 3c_2$$

Now, noting that $\frac{\partial s_2}{\partial \alpha} < 0$ and that $\frac{4d-\rho(3-4\alpha)c_2}{\rho(1-\alpha)}$ is increasing with α :

$$d > d_3 \Rightarrow \dot{\theta}_S > 0$$

Whatever the value of the rate of transfer.

If $d < d_3$, it exists $\bar{\alpha}$ such that:

$$\begin{aligned} \alpha &< \bar{\alpha} \Rightarrow \dot{\theta}_S < 0 \\ \alpha &> \bar{\alpha} \Rightarrow \dot{\theta}_S > 0 \end{aligned}$$

With:

$$4b(s_2)_{\bar{\alpha}} = \frac{4d - \rho\,(3 - 4\bar{\alpha})\,c_2}{\rho(1 - \bar{\alpha})}$$

III.B.4.4 Mixing the previous results

Firstly, $\tilde{\theta}_\infty > 0$: when time is sufficiently high, the carbon tax is or becomes always positive.

If $d < d_3$, then $\bar{\alpha} < \breve{\alpha}$. Proof: $d < d_3$, $\alpha < \bar{\alpha} \Rightarrow \dot{\theta}_S < 0$. In this case, $\theta_S\,(0) < 0$ would imply: $\tilde{\theta}_\infty < 0$, but this is impossible. Hence $d < d_3$, $\alpha < \bar{\alpha} \Rightarrow \theta_S\,(0) > 0 \Rightarrow \alpha < \breve{\alpha}$. Then: $\bar{\alpha} < \breve{\alpha}$. Hence:

- If $d > d_3$ the carbon tax is always increasing with time, its initial value being positive if $\alpha < \breve{\alpha}$ and negative if $\alpha > \breve{\alpha}$.

- If $d < d_3$ [24]: when $\alpha < \bar{\alpha}$ the carbon tax is decreasing with time but its initial value is positive and it remains always positive; when $\bar{\alpha} < \alpha < \breve{\alpha}$ both initial value and derivative with time are positive; when $\alpha > \breve{\alpha}$ the carbon tax is increasing with time and its initial value is negative.

III.B.5 Producer price

The best way to look at it is to use:

$$\begin{aligned} \rho V_p^S(X) &= bx^2 = bs_2^2\left(X - \tilde{X}_\infty\right)^2 \\ &\Rightarrow \rho V_p^{S'}(X) = 2bs_2^2\left(X - \tilde{X}_\infty\right) = -2bs_2 x \end{aligned}$$

Note that:

$$\begin{aligned} p &= c(X) + bx + V_p^{S\prime}(X) \\ &\Rightarrow p = c(X) + bx\left(1 - \frac{2s_2}{\rho}\right) > 0 \end{aligned}$$

[24] In this case $\breve{\alpha} > \bar{\alpha}$

$$\dot{p} = \dot{X}\left(-c_2 - bs_2 + \frac{2bs_2^2}{\rho}\right)$$

Let's use:

$$\frac{bs_2^2}{\rho} = \left(\frac{1}{5-6\alpha}\right)\left(b\left(3-4\alpha\right)s_2 + \frac{2d}{\rho} + \left(1-\alpha\right)c_2\right)$$

It comes:

$$\dot{p} = \dot{X}\left(\frac{1}{5-6\alpha}\right)\left(b\left(1-2\alpha\right)s_2 + \frac{4d}{\rho} + \left(4\alpha-3\right)c_2\right)$$

Hence:

$$\begin{aligned}\dot{p} &< 0 \Leftrightarrow b\left(1-2\alpha\right)s_2 + \frac{4d}{\rho} + \left(4\alpha-3\right)c_2 > 0\\ \dot{p} &> 0 \Leftrightarrow b\left(1-2\alpha\right)s_2 + \frac{4d}{\rho} + \left(4\alpha-3\right)c_2 < 0\end{aligned}$$

A step further:

- if $\alpha < \frac{1}{2}$

$$\begin{aligned}\dot{p} &< 0 \Leftrightarrow bs_2 > \frac{\left(3-4\alpha\right)c_2 - \frac{4d}{\rho}}{\left(1-2\alpha\right)}\\ \dot{p} &> 0 \Leftrightarrow bs_2 < \frac{\left(3-4\alpha\right)c_2 - \frac{4d}{\rho}}{\left(1-2\alpha\right)}\end{aligned}$$

- if $\alpha > \frac{1}{2}$:

$$\begin{aligned}\dot{p} &< 0 \Leftrightarrow bs_2 < \frac{\left(3-4\alpha\right)c_2 - \frac{4d}{\rho}}{\left(1-2\alpha\right)}\\ \dot{p} &> 0 \Leftrightarrow bs_2 > \frac{\left(3-4\alpha\right)c_2 - \frac{4d}{\rho}}{\left(1-2\alpha\right)}\end{aligned}$$

It's easy to see that the RHS of these inequalities is a decreasing function of the rate of transfer if $d > \frac{\rho c_2}{4}$ and an increasing one if $d < \frac{\rho c_2}{4}$.

Note also that if we define d_4 by:

$$b\left(s_2\right)_{\alpha=0,d_4} = 3c_2 - \frac{4d_4}{\rho}$$

Then:

$$\begin{aligned} d &> d_4 \Leftrightarrow b\left(s_2\right)_{\alpha=0} > 3c_2 - \frac{4d}{\rho} \\ d &< d_4 \Leftrightarrow b\left(s_2\right)_{\alpha=0} < 3c_2 - \frac{4d}{\rho} \end{aligned}$$

However, $s_2\left(\alpha\right) < 0$ but $s_2\left(\frac{3}{4}\right) > -\infty$. And that: $\left(s_2\right)_{\alpha=0,d=0} < 0 < 3c_2$.

Now three cases:

a) $d > d_4$

Note it implies: $d > \frac{3\rho c_2}{4}$

Let's compare $bs_2\left(\alpha\right)$ and $\frac{(3-4\alpha)c_2-\frac{4d}{\rho}}{(1-2\alpha)}$. In $\alpha = 0$, $b\left(s_2\right)_{\alpha=0} > 3c_2 - \frac{4d}{\rho}$, and it remains the case when $\alpha < \frac{1}{2}$ (except oddity simulation can rule out). After this value of the rate of transfer: $bs_2 < \frac{(3-4\alpha)c_2-\frac{4d}{\rho}}{(1-2\alpha)}$ as the RHS is always positive.

Hence, whatever the rate of transfer:

$$\dot{p} < 0$$

b) $\frac{\rho c_2}{4} < d < d_4$

Now $b\left(s_2\right)_{\alpha=0} < 3c_2 - \frac{4d}{\rho}$.

Before $\alpha = \frac{1}{2}$ we have firstly $bs_2 < \frac{(3-4\alpha)c_2-\frac{4d}{\rho}}{(1-2\alpha)}$ and then after a switch value ($\mathring{\alpha}$) that depends on damage, $bs_2 > \frac{(3-4\alpha)c_2-\frac{4d}{\rho}}{(1-2\alpha)}$. Hence:

$$\dot{p} > 0 \text{ if } \alpha < \mathring{\alpha} < \frac{1}{2}\text{ , and } \dot{p} < 0 \text{ if } \frac{1}{2} > \alpha > \mathring{\alpha}$$

with $\mathring{\alpha}$ such that:

$$b\mathring{s}_2 = \frac{(3-4\mathring{\alpha})\,c_2 - \frac{4d}{\rho}}{(1-2\mathring{\alpha})}$$

After $\alpha = \frac{1}{2}$, $\frac{(3-4\alpha)c_2 - \frac{4d}{\rho}}{(1-2\alpha)} > 0$ and hence:

$$\dot{p} < 0$$

c) $d < \frac{\rho c_2}{4}$

Now $\frac{(3-4\alpha)c_2 - \frac{4d}{\rho}}{(1-2\alpha)}$ is increasing in the rate of transfer. We have also $b\,(s_2)_{\alpha=0} < 3c_2 - \frac{4d}{\rho}$. Then when $\alpha < \frac{1}{2}$:

$$\dot{p} > 0$$

When $\alpha > \frac{1}{2}$

$$\alpha \sim \frac{1}{2} + \epsilon \Rightarrow \frac{(3-4\alpha)\,c_2 - \frac{4d}{\rho}}{(1-2\alpha)} \to -\infty$$

Hence it exists $\alpha^{\neq}$ such that:

$$\dot{p} > 0 \text{ if } \frac{1}{2} < \alpha < \alpha^{\neq}, \text{ and } \dot{p} < 0 \text{ if } \alpha > \alpha^{\neq}$$

As far the initial producer price is concerned:

$$\begin{aligned} p &= c(X) + bx\left(1 - \frac{2s_2}{\rho}\right) > 0 \\ &\Rightarrow p\,(0) = c_1 - c_2\tilde{X}_\infty + \left(X_0 - \tilde{X}_\infty\right)\left(-c_2 - bs_2 + \frac{2bs_2^2}{\rho}\right) \end{aligned}$$

III.B.6 Evolution of the initial oil consumption with the rate of transfer

$$\frac{\partial \tilde{X}_\infty}{\partial \alpha} = \left(X_0 - \tilde{X}_\infty\right) \frac{1}{\left(1 - \alpha + \frac{\rho c_2 (1-\alpha)^2}{2d}\right)}$$
$$\frac{\partial s_2}{\partial \alpha} = \frac{1}{(5 - 6\alpha)} \frac{(-2\rho b s_2 + 12d + \rho c_2)}{[(5 - 6\alpha) 2 b s_2 - \rho b (3 - 4\alpha)]}$$

After some calculus:

$$\frac{\partial x_0}{\partial \alpha} = \frac{\left(X_0 - \tilde{X}_\infty\right)}{(5 - 6\alpha)[(5 - 6\alpha) 2 b s_2 - \rho b (3 - 4\alpha)]} * \frac{1}{\left(1 - \alpha + \frac{\rho c_2 (1-\alpha)^2}{2d}\right)}$$
$$* \begin{bmatrix} \rho b s_2 \left(\frac{\rho c_2 (1-\alpha)^2}{2d} + 17 - 40\alpha + +24\alpha^2\right) + 2\rho c_2 (1 - \alpha)(2 - 3\alpha) \\ -\frac{\rho^2 c_2^2 (1-\alpha)^2}{2d} + 4d (2 - 3\alpha) \end{bmatrix}$$

It is obvious that that when the rate of transfer is superior to $\frac{2}{3}$ the derivative is always positive. When damage is zero or near it and the rate of transfer is zero or near it, $\frac{\partial x_0}{\partial \alpha}$ is equivalent to:

$$\sim \left(\frac{X_0 - \tilde{X}_\infty}{D < 0}\right) [\rho b s_2 \left(\frac{\rho c_2}{2d}\right) - \frac{\rho^2 c_2^2}{2d}] > 0$$

When damage is zero or near it and the rate of transfer is zero or near it, the initial oil consumption is increasing with the rate of transfer.

Simulation confirms it for values of parameters identical to those of Tahvonen and Lisky for a, b, c_1, c_2 , ρ . For the range of values of damage used by these authors - $0 < d <\sim 0.01$ - , the initial oil consumption is increasing with the rate of transfer. It is no longer true if $d >\sim 0.01$. In this last case, simulation shows that for small and intermediate values of the rate of transfer the initial oil consumption is decreasing with the rate of transfer and it confirms that for values above $\frac{2}{3}$ it is surely increasing with it.

III.B.7 Comparison of payoffs

$$\frac{V_B^S(X_0)}{V_B^T(X_0)} = \frac{s_2^2(\frac{3}{2} - 2\alpha)}{r_2^2(\frac{1}{2} - \alpha)}$$

Simulation confirms that with our value of parameters this ratio is higher than 1 for a rate of transfer inferior to 1/2. Let's look for instance at the case $n = 0.7$ and $d = 0.004$:

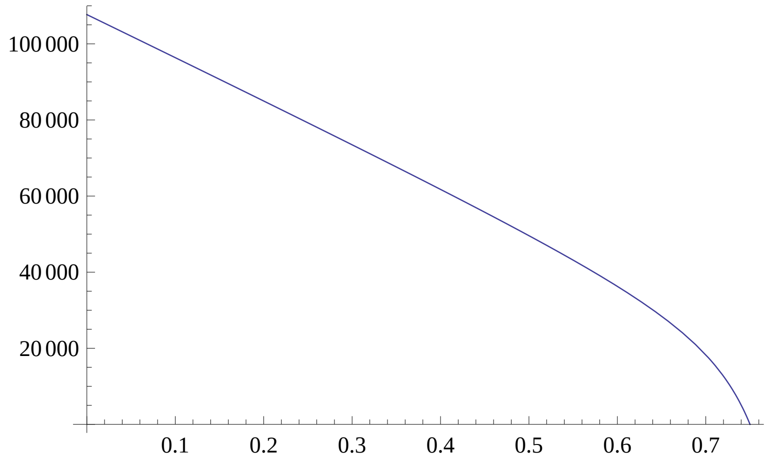

Figure III.23: $n = 0.7, d = 0.004$, $V_B^S(X_0)[\alpha]$

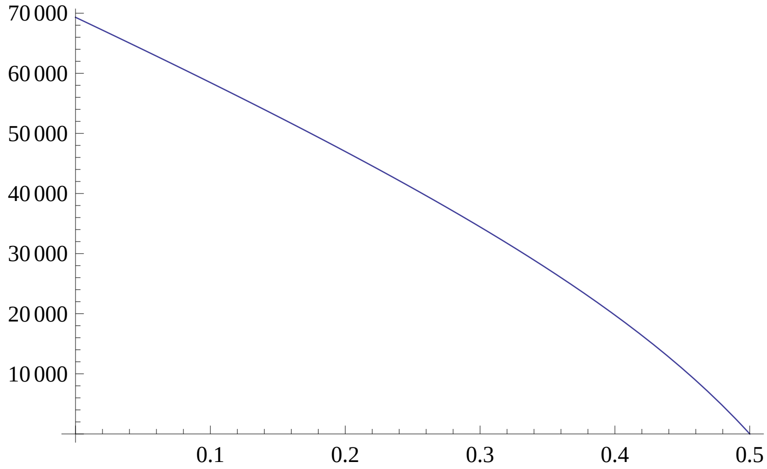

Figure III.24: $n = 0.7, d = 0.004, V_B^T(X_0)[\alpha]$

III.B.8 Payoff of area A

$$V_A^S(X_0) = (1-n)\int_0^\infty (u(x_S) - p_S x_S)\, e^{-\rho t} dt + \int_0^\infty \alpha n \theta_S x_S e^{-\rho t} dt$$

$$V_A^S\left(X_0\right)=(1-n)\int_0^\infty\left(\frac{b}{2}x_S^2\right)e^{-\rho t}dt+\int_0^\infty\left(\alpha n+1-n\right)\theta_S x_S e^{-\rho t}dt$$

Note now that:

$$\theta_S=\left(X_0-\tilde{X}_\infty\right)\left[\frac{2d}{\rho\left(1-\alpha\right)}+e^{s_2t}\left(c_2+2bs_2-\frac{2bs_2^2}{\rho}\right)\right]$$

Then:

$$V_A^S\left(X_0\right)=(1-n)\frac{b}{2}\frac{s_2^2\left(X_0-\tilde{X}_\infty\right)^2}{\rho-2s_2}$$

$$-\left(\alpha n+1-n\right)s_2\left(X_0-\tilde{X}_\infty\right)^2\left[\frac{2d}{\rho\left(1-\alpha\right)\left(\rho-s_2\right)}+\frac{c_2+2bs_2-2bs_2^2\left(\frac{1}{\rho}\right)}{\left(\rho-2s_2\right)}\right]$$

It's possible to go further when the rate of transfer is equal to zero (or very near it) and when damage is equal to zero (or very near it). Our aim here is to see if in this area:

$$\left.\frac{\partial V_A^S\left(X_0\right)}{\partial\alpha}\right|_{d=0;\alpha=0}>0$$

A manageable way to do do this is to note that:

$$\begin{aligned}V_B^S\left(X_0\right) &= n\int_0^\infty\left(\frac{b}{2}x_S^2\right)e^{-\rho t}dt+\int_0^\infty n(1-\alpha)\theta_S x_S e^{-\rho t}dt-n\int_0^\infty d\left(X_S-X_0\right)^2e^{-\rho t}dt\\ &= \left(\frac{1}{\rho}\right)nb(x_0^2)_T(\frac{3}{2}-2\alpha)\end{aligned}$$

Hence:

$$\int_0^\infty\theta_S x_S e^{-\rho t}dt=\frac{1}{n(1-\alpha)}\left[\left(\frac{1}{\rho}\right)nb(x_0^2)_S(\frac{3}{2}-2\alpha)-n\int_0^\infty\left(\frac{b}{2}x_S^2\right)e^{-\rho t}dt+n\int_0^\infty d\left(X_S-X_0\right)^2 e\right.$$

And:

$$\begin{aligned} V_A^S(X_0) &= (1-n)\int_0^\infty \left(\frac{b}{2}x_S^2\right)e^{-\rho t}dt \\ &+\frac{(\alpha n+1-n)}{n(1-\alpha)}\left[\left(\frac{1}{\rho}\right)nb(x_0^2)_S(\frac{3}{2}-2\alpha)-n\int_0^\infty\left(\frac{b}{2}x_S^2\right)e^{-\rho t}dt+n\int_0^\infty d\left(X_S-X_0\right)^2e^{-\rho t}d \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_A^S(X_0) &= -\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)\int_0^\infty\left(\frac{b}{2}x_S^2\right)e^{-\rho t}dt \\ &+\frac{(\alpha n+1-n)}{(n(1-\alpha))}\left[\left(\frac{1}{\rho}\right)nb(x_0^2)_S(\frac{3}{2}-2\alpha)+n\int_0^\infty d\left(X_S-X_0\right)^2e^{-\rho t}dt\right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_A^S(X_0) &= \frac{b(x_0^2)_S}{2(1-\alpha)}\left[-\frac{\alpha}{\rho-2s_2}+\left(\frac{1}{\rho}\right)(\alpha n+1-n)(3-4\alpha)\right] \\ &+\frac{(\alpha n+1-n)}{((1-\alpha))}\int_0^\infty d\left(X_S-X_0\right)^2e^{-\rho t}dt \end{aligned}$$

When $d=0$ or near it, the last term wil give no derivative with respect to α different from zero. Hence after some calculus :

$$\left.\frac{\partial V_A^S(X_0)}{\partial\alpha}\right|_{d=0;\alpha=0}=\frac{b(x_0^2)_S}{2}\left[-\frac{1}{\rho-2s_2}+\left(\frac{1}{\rho}\right)(7n-4)\right]+\left(\frac{3(1-n)}{\rho}\right)\left[\frac{b(x_0^2)_S}{2}+b\left(x_0\right)_S\left.\frac{\partial\left((x_0)_S\right)}{\partial\alpha}\right|_{d=0;\alpha=0}\right.$$

$$\left.\frac{\partial V_A^S(X_0)}{\partial\alpha}\right|_{d=0;\alpha=0}=\frac{b(x_0^2)_S}{2}\left[-\frac{1}{\rho-2s_2}+\left(\frac{1}{\rho}\right)(4n-1)\right]+\left(\frac{3(1-n)}{\rho}\right)\left[b\left(x_0\right)_S\left.\frac{\partial\left((x_0)_S\right)}{\partial\alpha}\right|_{d=0;\alpha=0}\right]$$

Now, as damage is near zero, from Appendix III.B.6:

$$\begin{aligned} \left.\frac{\partial\left((x_0)_S\right)}{\partial\alpha}\right|_{d=0;\alpha=0} &\sim \left(\frac{X_0-\tilde{X}_\infty}{(5)\left[10bs_2-3\rho b\right]}\right)*\left[\rho bs_2-\rho c_2\right] \\ &= \left(\frac{(x_0)_S}{-(5)\left[10bs_2^2-3\rho bs_2\right]}\right)*\left[\rho bs_2-\rho c_2\right] \end{aligned}$$

Hence:

$$\left.\frac{\partial V_A^S\left(X_0\right)}{\partial \alpha}\right|_{d=0;\alpha=0} \sim \frac{b(x_0^2)_S}{2\rho}\left[+\frac{\rho}{2s_2-\rho}+(4n-1)+6\left(\frac{(1-n)\left(\rho b s_2-\rho c_2\right)}{-(5)\left[10bs_2^2-3\rho b s_2\right]}\right)\right]$$

The expression within bracket is equal to:

$$\frac{(\rho+(2s_2-\rho)(4n-1))(-5)\left[10bs_2^2-3\rho b s_2\right]+6\left(2s_2-\rho\right)(1-n)\left(\rho b s_2-\rho c_2\right)}{\left(2s_2-\rho\right)(-5)\left[10bs_2^2-3\rho b s_2\right]}=\frac{N}{D}$$

$D > 0$. As far as N is concerned:

$$\begin{aligned} N &= -100\,(4n-1)\,bs_2^3+bs_2^2\left(-50\,(2\rho-4\rho n)+30\rho\,(4n-1)+12\rho\,(1-n)\right) \\ &\quad +s_2\left(15\rho b\,(2\rho-4\rho n)+6\,(1-n)\left(-\rho^2 b-2\rho c_2\right)\right)+6\,(1-n)\,\rho^2 c_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N &= -100\,(4n-1)\,bs_2^3+\rho b s_2^2\,(-118+308n)+ \\ &\quad s_2\left(\rho^2 b\,(24-54n)-12\,(1-n)\,\rho c_2\right)+6\,(1-n)\,\rho^2 c_2 \end{aligned}$$

If $n > \frac{24}{54} \sim 0.44$, $N > 0$ and:

$$\left.\frac{\partial V_A^S\left(X_0\right)}{\partial \alpha}\right|_{d=0;\alpha=0} > 0$$

In this case $V_A^S\left(X_0\right)$ is increasing with the rate of transfer at the beginning. We know also that, when the rate of transfer is near $\frac{3}{4}$, $V_A^S\left(X_0\right)$ becomes negative if damage is near zero; indeed from above:

$$V_A^S\left(X_0\right) \sim b(x_0^2)_S\left[-\frac{\frac{3}{2}}{\rho-2s_2}\right]$$

This payoff being a continuous function there is a maximum for it relative to the rate of transfer.

Numerical simulations

For parameters we use the same values as those used by Liski and Tahvonen in their article of 2004. That is:

$$
\begin{aligned}
a &= 1000 \\
b &= 8 \\
c_1 &= 1100 \\
c_2 &= 0.333 \\
\rho &= 0.05 \\
X_0 &= 3000
\end{aligned}
$$

As far as damage is concerned it can be variable but a range of special interest is:

$$0 < d < 0.1$$

Here there are two more variables:

- the number of rich countries; let's assume:

$$n = 0.4 \text{ or } n = 0.7$$

- the rate of transfer α .

The figures are drawn with $n = 0.4$ or with $n = 0.7$ (see the captions).

Chapter IV

Rivalry between two consuming areas

The basis for the following framework is the attitude of fossil energy consuming countries today: as many world meetings have shown in the recent years, these consuming countries are unable to agree between themselves to reach a world optimum taking into account the environmental damage due to the consumption of fossil energy. In fact, though it's of course a simplification, there are two groups of countries: the old rich ones that for different reasons would like to act against the accumulation of CO_2 in the atmosphere (except some of them: for instance the USA) and the poor and emergent countries that are are reluctant to act since they think it would slow their growth or that the old rich countries have been responsible for the past accumulation of CO_2 in the atmosphere during the last two centuries. In fact these two areas are often bickering in these meetings and showing sometimes a deep misunderstanding and even a profound rivalry.

However, unilateral action of those that are motivated to act is unlikely to be efficient. Oil consumption will not be slowed down in the poor and emergent countries and furthermore unilateral action from the old rich countries will create a windfall effect in the poor and emergent countries. Indeed, the worldwide environmental damage will somewhat be brought down by an unilateral action in some countries and hence those that do not do anything will benefit from the action of the others and of course will not be urged to do anything. It's in in fact the difficulty that Europe has: it has introduced some mechanism to fight the climate change due to fossil energy consumption, but the others do not do anything (or very little) and they could get a windfall from the action of the European countries.

Hence it's the interest of Europe or more globally of those countries that are motivated against the climate change to get the others to act. It would require however some incentive, a transfer for instance. Thus the idea "a transfer against a form of carbon tax". However do not misunderstand about this proposed scheme, as it's different from that thought of before. Here, both areas woud remain in rivalry and, while dealing in some way together, they would fight against each other to maximize their welfare. In this framework it's not worth for instance thinking that the poor and emergent countries would agree to set up a level of carbon tax decided by the other area: they would on the contrary choose on their own the level maximizing their interest, knowing the choice of the old rich countries. As far as the old rich countries are concerned, they are assumed to agree with the transfer to the other area but to keep in mind their own interest and hence to maximize their welfare with respect to their own carbon tax, knowing the decisions of this other area. They hope furthermore that, while on the one hand the transfer would bring down their fossil energy consumption and their welfare, on the other hand they could get more welfare because of the decrease of the environmental damage due to the worldwide setting up of carbon taxes (though there would be two carbon taxes).

As producing countries are assumed to be completely passive since the focus is here on the links betweens two consuming areas of fossil energy, the framework is hence a non cooperative game between the two consuming areas each one choosing its level of a carbon tax knowing the strategy of the other. They both know that this case of confrontation between them (and in particular the setting up of two different carbon taxes instead of a worldwide one) would be worse than a full cooperation leading to a world optimum but also that for many reasons they are unable to strike an optimum deal, whatever they pretend to say or to do.

This scheme will be explored successively in a static game, then in a dynamic game. The interest of the static game is to be very simple. It can be considered as an introduction to the dynamic game. The conclusions will be quite the same in both games. Indeed, the two areas would have a greater welfare if they play the non cooperative game instead of doing nothing in front of the environmental damage.

1 The static game

Let's define more precisely the world we are in : two areas of oil consumption. The old rich area (B) is made up of nN countries, the other area (A) is made up of $(1-n)\,N$ countries (these countries are poor countries and emergent countries). Each area is cartelized with its own regulator. They are in a non cooperative attitude against each other.

Utility function is quadratic and the same in both areas. Hence, for each country of area A: $u\left(x_A\right) = ax_A - \frac{b}{2}x_A^2$.

From a welfare standpoint, both areas bear an environmental damage but it does not mean that their decisions will always take into account this damage (see later). The worldwide damage is by assumption Ndx^2, with d constant, that is d is the damage borne by one country if the world oil consumption is equal to one. Damage borne by area A is: $(1-n)\,Ndx^2$, if x is the world oil consumption. Let's take notice that in the game area A takes into account the environmental damage, while it was not the case in the previous chapter. This is consistent with the fact that here area A choses the level of its carbon tax. For B, the damage it bears is of course $nNdx^2$.

The producers are price - takers and are assumed to consume no oil. Furthermore, the producer price is $p = c_1$. With c_1 being constant. This assumption is consistent with the fact that the focus is here on the links between the two consuming areas.

After describing what shoud be an optimal solution, we deal with three cases. The first two cases are not game cases but they introduce the third case, which is a non cooperative static game.

In the first case, no consuming area takes into account the environmental damage, when making its choices.

In the second case, area B would consider a carbon tax, as it would be aware of the consequences of the climate change. Area A would not. Area A would get a windfall effect from the introduction of a carbon tax in the other area. Of course the carbon tax would not be worlwide and the reduction of the damage would be limited.

This leads to the non cooperative game. Knowing the flaws of unilateral action, area B would like to get area A introducing a carbon tax since it thinks that it could be in its own interest (reducing the damage area B bears). Hence it comes up with a proposal to area A: a transfer to this area against the setting up of a tax to fight the environmental damage.

Let' s assume that the two areas strike this deal, but that each area maximizes its own welfare relatively to its control variable (the carbon tax θ for area B, the carbon tax q in area A), assuming the other is determined, and thus they fight against each other in a non cooperative static game leading to a Nash equilibrium. At the end, when looking at the different payoffs, we will consider if the deal is good for both areas.

1.1 What they should do and do not do: the optimal solution

If a worlwide regulator could be put up, it would look for the world optimum. Of course, the two areas would not agree with the setting up of such a world regulator as they are in fact rivals.

Ideally, the regulator should maximize the world welfare. Note also that the producing area welfare is nil in this framework since there is no profit in the producing activity; hence the world regulator should maximize the sum of both consuming areas welfare. Its problem would be then:

$$\max_{x_A, x_B} nN \left[ax_B - \frac{1}{2}bx_B^2 - dx^2 - c_1 x_B\right] + (1-n)\, N \left[ax_A - \frac{1}{2}bx_A^2 - dx^2 - c_1 x_A\right] \tag{IV.1}$$

It would imply:

$$a - bx_A = c_1 + 2Ndx = a - bx_B \tag{IV.2}$$

$$\implies x_A = x_B = \frac{x}{N}$$

Note that:

$$x = N\left[(1-n)\, x_A + nx_B\right] = Nx_B$$

Hence[1]:

$$a - \frac{b}{N}x = c_1 + 2Ndx$$

$$x = \frac{a - c_1}{\frac{b}{N} + 2Nd} \tag{IV.3}$$

$$x_A = x_B = \frac{a - c_1}{b + 2N^2 d} \tag{IV.4}$$

Its easy to work out the payoffs:

$$\frac{(V_A)_{optimal}}{N\,(1-n)} = ax_A - \frac{1}{2}bx_A^2 - dx^2 - c_1 x_A$$

$$= 2dx^2 + \frac{1}{2}bx_A^2 - dx^2 = \frac{1}{2}bx_A^2 + dx^2$$
$$= x^2 \left(\frac{b}{2N^2} + d\right)$$

[1] It's assumed from now on that $c_1 < a$.

Finally:

$$\frac{(V_A)_{optimal}}{N(1-n)} = \frac{(V_B)_{optimal}}{Nn} = \left(\frac{a-c_1}{\frac{b}{N}+2Nd}\right)^2 \left(\frac{b}{2N^2}+d\right)$$

Or:

$$\frac{(V_A)_{optimal}}{N(1-n)} = \frac{(V_B)_{optimal}}{Nn} = \frac{(a-c_1)^2}{2N(\frac{b}{N}+2Nd)} \tag{IV.5}$$

1.2 First case: no area taking into account the environmental damage

Here the two rivals do not do any effort to fight the environmental damage and, while they suffer from it, are completely passive in front of it. They do not introduce any tax. This situation can be viewed as schematic but the inaction of many countries in the world in front of the environmental damage makes it acceptable. Then:

$$u^{'}(x_A) = a - bx_A = c_1$$
$$u^{'}(x_B) = a - bx_B = c_1$$
$$\Rightarrow x_A = x_B$$
$$x = N\left[(1-n)\,x_A + nx_B\right] = Nx_A$$

$$x = N\left(\frac{a-c_1}{b}\right) \tag{IV.6}$$

The environmental damage does not influence the choices but it's borne by the consuming areas. The welfare of area A divided by its number of countries is in this case (the case 1):

$$\begin{aligned}\frac{(V_A)_1}{N(1-n)} &= ax_A - \frac{1}{2}bx_A^2 - dx^2 - c_1x_A \\ &= \frac{1}{2}bx_A^2 - dx^2 \\ &= x_A^2\left(\frac{b}{2} - dN^2\right)\end{aligned}$$

That is:

$$\frac{(V_A)_1}{N(1-n)} = \frac{(a-c_1)^2}{b^2}\left(\frac{b}{2} - dN^2\right) \tag{IV.7}$$

Note that[2]:

$$\frac{(V_A)_1}{N(1-n)} = \frac{(V_B)_1}{Nn} \tag{IV.8}$$

1.3 Second case: only area B fighting the damage

We assume here that the area B countries are much more alive to the environmental damage than the area A countries and hence are more likely to act against it. In this case, area B sets up a carbon tax θ[3]. Its problem is:

$$\max_{\theta} nN\left[ax_B - \frac{1}{2}bx_B^2 - dx^2 - c_1x_B\right] \tag{IV.9}$$

With:

$$a - bx_B = c_1 + \theta \tag{IV.10}$$

Hence:

$$a - bx_B - c_1 - 2nNdx = 0$$

$$\Longrightarrow \theta = 2nNdx \tag{IV.11}$$

[2] It's not worth proving that this welfare is inferior to that of the optimum but it can be done easily.

[3] Of course the carbon tax would be reimboursed in lump - sum dotations to the consumers, as it will be the case for all the market situations of this paper.

In area A there is no tax, as these countries are assumed here to remain passive in front of the environmental damage. Hence:

$$a - bx_A = c_1$$

And:

$$x = N\left[(1-n)\,x_A + nx_B\right]$$

it implies:

$$a - \frac{bx}{N} = c_1 + 2n^2Ndx$$

$$x = \frac{a - c_1}{\frac{b}{N} + 2n^2Nd} \tag{IV.12}$$

Of course

$$\frac{a - c_1}{\frac{b}{N} + 2n^2Nd} < \frac{a - c_1}{\frac{b}{N}}$$

World oil consumption is reduced in this second case as compared to the case1, that is: $x_2 < x_1$

Hence area A benefits from a windfall effect coming from the unilateral setting up of a carbon tax in area B, that pushes downward the environmental damage. Indeed:

$$\frac{(V_A)_2}{N\,(1-n)} = \frac{1}{2}b[(x_A)_2]^2 - d\,(x_2)^2 \tag{IV.13}$$

The result is obvious as:

$$(x_A)_2 = (x_A)_1$$

$$x_2 < x_1$$

$$\Longrightarrow \frac{(V_A)_2}{N\,(1-n)} > \frac{(V_A)_1}{N\,(1-n)} \tag{IV.14}$$

To sum up, area A is not induced at all to make anything against the climate change if area B acts unilaterally. Understanding this pitfall, area B should give up any idea to do so[4]. Hence the following proposal from area B: a subsidy against the setting up of a carbon tax in area A.

1.4 The non cooperative static game

Now we are in this setting: area B makes the proposal "carbon tax against a transfer" but this stance does not prevent rivalry between the two areas. Indeed, each area maximizes its own welfare relatively to its control variable. Hence they play against each other, which should lead to a Nash equilibrium.

As far as the transfer is concerned, the main assumption is that it is proportional to the reduction of consumption resulting of the setting up of the carbon q in area A. The idea is that area B has a strong interest in reducing area A consumption since it lowers the environmental damage that area B bears. Hence the transfer can be directly linked to this consumption decrease in area A[5].

Now, let's remind us that:

$$\begin{aligned} u'(x_A) &= c_1 \Longleftrightarrow x_A = x_A^d(c_1) \\ u'(x_A) &= c_1 + q \Longleftrightarrow x_A = x_A^d(c_1+q) \end{aligned} \tag{IV.15}$$

Hence the consumption decrease in area A resulting of the setting up of the carbon tax q is:

$$x_A^d(c_1) - x_A^d(c_1+q)$$

[4] In other words we assume that the second case never happens and is only a theoretical case that area B considers but in any case will dodge as it's a very bad case.
The fact that area A improves its welfare in this case without doing nothing is a sufficient reason for area B to dodge it as they are in rivalry. Furthermore, never mind for area B to improve a bit its own welfare in this unilateral action case as compared to the passive case (it can be easily shown), since it hopes that with the forthcoming game it will gain more (simulation confirms it will be true with our values of parameters).

[5] Take notice that this choice of transfer would not be appropriate in the previous chapter since area A does not decide the level of its carbon tax in this chapter.

To give a monetary value to this transfer, it seems natural to use θ, which is the "price" of the damage from area B standpoint. Then the transfer can be proportional to:

$$\theta\left(x_A^d\left(c_1\right)-x_A^d\left(c_1+q\right)\right)$$

Finally, it is assumed that the transfer is equal to half the expression just above, that is:

$$S=\frac{1}{2}\theta\left(x_A^d\left(c_1\right)-x_A^d\left(c_1+q\right)\right) \tag{IV.16}$$

As:

$$x_A^d\left(c_1\right)-x_A^d\left(c_1+q\right)=\frac{\left(1-n\right)N}{b}q$$

It comes:

$$S=\frac{\left(1-n\right)N}{2b}q\theta \tag{IV.17}$$

A factor strictly inferior to one has two reasons: firstly area B does not want to offset completely the consumption reduction in area A since it demands that area A makes some effort, secondly area B wants to limit the burden of the transfer. The choice of $\frac{1}{2}$ is an exogenous assumption to make the calculus easy but it has some more advantage as we see soon.

Note that for the transfer we adapt and modify an idea of Jon Strand (2011)[6].

We are looking only for the solutions such that the carbon tax θ in area B is greater than the carbon tax q in area A: the reason is that financing cases where $q>\theta$ would be too costly for area B and then it seems appropriate to discard such solutions.

The problem of B is:

$$\max_{\theta} nN\left[ax_B-\frac{1}{2}bx_B^2-dx^2-c_1x_B\right]-\frac{\left(1-n\right)N}{2b}q\theta \tag{IV.18}$$

6 In this paper of Strand there is no confrontation between two areas of consumption. A dynamic version has been made later, but also without confrontation between two consuming areas (Karp, Sidiqui, Strand (2011)) .

With:

$$a - bx_B = c_1 + \theta \tag{IV.19}$$

Then:

$$nN\left[a - bx_B - 2dnNx - c_1\right]\left(-\frac{1}{b}\right) - \frac{(1-n)\,N}{2b}q = 0$$

Hence the FOC:

$$n\theta + \frac{(1-n)}{2}q = 2n^2Ndx \tag{IV.20}$$

The problem of A is:

$$\max_q\,(1-n)\,N\left[ax_A - \frac{1}{2}bx_A^2 - dx^2 - c_1x_A\right] + \frac{(1-n)\,N}{2b}q\theta \tag{IV.21}$$

With:

$$a - bx_A = c_1 + q \tag{IV.22}$$

Then:

$$\left[a - bx_A - 2d\,(1-n)\,Nx - c_1\right]\left(-\frac{1}{b}\right) + \frac{1}{2b}\theta = 0$$

$$q - 2d\,(1-n)\,Nx - \frac{1}{2}\theta = 0$$

It implies the following FOC:

$$q = 2\,(1-n)\,Ndx + \frac{1}{2}\theta \tag{IV.23}$$

Together the two FOCs lead to:

$$\theta n + \frac{(1-n)}{2}\left[2\,(1-n)\,Ndx + \frac{1}{2}\theta\right] = 2n^2Ndx$$

That is:

$$\theta = \frac{4\,(n^2 - 1 + 2n)\,Ndx}{3n+1} \tag{IV.24}$$

And:

$$q = \frac{4n\,(2-n)\,Ndx}{3n+1} > 0 \tag{IV.25}$$

A first question is: $\theta > 0$? It's the case if $n > \sqrt[2]{2} - 1$.

$$\theta - q = \frac{4\,(2n^2-1)\,Ndx}{3n+1} \tag{IV.26}$$

As said before, we are looking only for the solutions such that $\theta - q > 0$ [7].

$\theta - q > 0$ requires $n > \frac{1}{\sqrt[2]{2}} > \sqrt[2]{2} - 1$. It's assumed from now on that this condition is satisfied. The reason of this condition is clear: as the transfer is proportional to $1-n$, a "low" n would imply a huge transfer which could finance a carbon tax in area A that could be higher than that of area B. On the contrary, when area A is a minority in the world, approximately less than 30% of the world in fact, $\theta > q$.

The equilibrium is easily worked out:

$$a - bx_B = c_1 + \theta$$

$$a - bx_A = c_1 + q$$

$$x = N\left[(1-n)\,x_A + nx_B\right]$$

Hence:

$$a - \frac{b}{N}x = c_1 + \left[(1-n)\,q + n\theta\right]$$

$$a - \frac{b}{N}x = c_1 + [(1-n)\,\frac{4n\,(2-n)\,Ndx}{3n+1} + n\frac{4\,(n^2-1+2n)\,Ndx}{3n+1}]$$

[7] Let's come back on the choice of the exogenous factor $\frac{1}{2}$.
Let's assume one moment that the factor is not determined but is α, with $0 < \alpha < 1$.
It can be shown that for avoiding $q > \theta$ the following condition is required on the factor α :

$$\alpha < \frac{n\,(2n-1)}{2n^2-2n+1}$$

This confirms that the rate of transfer must not be too high.
Chosing a high level for the factor, for instance near 1, would imply that n should be near 1, which seems unlikely from an economic standpoint (there will never be 95% of financing countries).
On the contrary, with a rate of transfer of $\frac{1}{2}$, the proportion of countries of area B that is necessary for $\theta > q$ to prevail must be such that $n > \frac{1}{\sqrt[2]{2}} \sim 0.7$ and this condition is quite easier to comply with from an economic standpoint.

$$a - \frac{b}{N}x = c_1 + \frac{4nNdx\left(\left(2-n\right)\left(1-n\right) + \left(n^2 - 1 + 2n\right)\right)}{3n+1}$$

$$a - \frac{b}{N}x = c_1 + \frac{4nNdx\left(2n^2 - n + 1\right)}{3n+1}$$

$$x = \frac{a - c_1}{\frac{b}{N} + \frac{4nNd(2n^2-n+1)}{3n+1}} \tag{IV.27}$$

Call it for obvious reasons x_3. We have:

$$x_3 < x_2 < x_1 \tag{IV.28}$$

The setting up of two taxes in the world reduces the oil consumption, but brings down the environmental damage.

From:

$$a - bx_A = c_1 + q = c_1 + \frac{4n\left(2-n\right)Ndx}{3n+1}$$

It comes:

$$x_A = \frac{1}{b}\left[a - c_1 - x\frac{4n\left(2-n\right)Nd}{3n+1}\right]$$

$$x_A = \frac{\left(a-c_1\right)\left[\frac{b}{N} + \frac{4nNd\left(2n^2-n+1\right)}{3n+1} - \frac{4n(2-n)Nd}{3n+1}\right]}{b\left(\frac{b}{N} + \frac{4nNd(2n^2-n+1)}{3n+1}\right)}$$

Or:

$$x_A = \frac{\left(a-c_1\right)\left[\frac{b}{N} + \frac{4nNd\left(2n^2-1\right)}{3n+1}\right]}{b[\frac{b}{N} + \frac{4nNd(2n^2-n+1)}{3n+1}]} \tag{IV.29}$$

Oil consumption in area A is surely positive if $n > \frac{1}{\sqrt[2]{2}}$.

As far as oil consumption in area B is concerned:

$$x_B = \frac{1}{b}\left[a - c_1 - x\left(\frac{4\left(n^2 - 1 + 2n\right)Nd}{3n+1}\right)\right]$$

$$x_B = \frac{(a - c_1)\left[\frac{b}{N} + \frac{4nNd\left(2n^2-n+1\right)}{3n+1} - \frac{4\left(n^2-1+2n\right)Nd}{3n+1}\right]}{b\left(\frac{b}{N} + \frac{4nNd(2n^2-n+1)}{3n+1}\right)}$$

$$x_B = \frac{(a - c_1)\left[\frac{b}{N} + 4N\left(\frac{n-1}{3n+1}\right)(2n^2 - 1)\, d\right]}{b\left(\frac{b}{N} + \frac{4nNd(2n^2-n+1)}{3n+1}\right)} \tag{IV.30}$$

Hence:

$$x_B > 0 \Leftrightarrow \left[\frac{b}{N} + 4N\left(\frac{n-1}{3n+1}\right)\left(2n^2 - 1\right) d\right] > 0 \tag{IV.31}$$

As $n > \frac{1}{\sqrt[2]{2}}$ it requires:

$$d < \frac{b\,(3n+1)}{4N^2\,(1-n)\,(2n^2-1)} \tag{IV.32}$$

That is for not too high a damage[8]. The reason is clear: if damage were too "high", area B consumption would be squeezed by the carbon tax needed to limit the effect of damage. From now on we assume that this condition is satisfied.

Note that with $n > \frac{1}{\sqrt[2]{2}}$, $x_A > x_B$.

Lets look now at the payoffs in the static game.

For area A:

$$\frac{(V_A)_3}{N\,(1-n)} = a(x_A)_3 - \frac{1}{2}b[(x_A)_3]^2 - d\,(x_3)^2 - c_1(x_A)_3 + \frac{q\theta}{2b} \tag{IV.33}$$

For area B:

[8] For numerical evaluations or simulations, the following parameters are used from now on :

$$a = 1100$$
$$b = 800$$
$$c_1 = 600$$
$$N = 100$$
$$n = 0.75$$

With these values, the area B consumption is nil for $d \sim 2$.

$$\frac{(V_B)_3}{Nn} = a(x_B)_3 - \frac{1}{2}b[(x_B)_3]^2 - d\,(x_3)^2 - c_1(x_B)_3 - \left(\frac{1-n}{n}\right)\frac{q\theta}{2b} \tag{IV.34}$$

Firstly, it's obvious that $\frac{VA3}{(1-n)N} > \frac{VB3}{nN}$ since $(x_A)_3 > (x_B)_3$[9] . To prove that both players have a greater welfare in the game than in the passive case, it's then sufficient to show that:

$$\frac{VB3}{nN} > \frac{VB1}{nN} = \frac{VA1}{(1-n)\,N}$$

We know all the components of the payoffs but the calculus is rather tedious. The best way to go further is to use simulation. Please go to the appendix IV.B. It shows that for our values of parameters, whatever the damage[10]:

$$\frac{VB3}{nN} > \frac{VB1}{nN} \tag{IV.35}$$

Hence area A, but also area B, gets profit from playing the static game rather than being passive in front of the environmental damage. Of course, it would be better for them in terms of welfare to cooperate for the world optimum, but their rivalry prevents them to do so. Hence, area B is quite right to make the proposal "tax against transfer", as it is way to bring down the environmental damage for both of the areas and to increase their welfare. Of course the price to be paid for area B when doing this proposal is that each country of area B has a smaller payoff than each country of area A. However, the result of the paper requires that area A is a minority of countries and that damage is not too high (see the precise conditions above).

[9] $ax - \frac{1}{2}bx^2 - c_1x$ is increasing with x when $x < \frac{a-c_1}{b}$, which is true for x_A and x_B.
[10] The increase of n does not change either the result.

2 A dynamic version of the game

The static game above can be transformed into a dynamic game, with some changes. The purpose of the game is the same as before: to see if the players can benefit from a strategic stance as compared to the stance where they are passive in front of the environmental damage.

2.1 Some new assumptions

Firstly, let's assume that the environmental damage is now a quadratic function depending on the stock of pollution[11], to take into account the dynamics of damage. For the whole world the damage is assumed to be:

$$Nd\,(X - X_0)^2$$

Area A bears a damage $(1-n)\,Nd\,(X - X_0)$ and area B a damage $nNd\,(X - X_0)^2$.

Secondly, it's assumed that the planning horizon is now $[0, T]$ with $T < \infty$ and $T >> 0$. The economic idea behind is that the players are short - sighted. This is quite possible as the players have strategic stances. There can be many reasons for this short - sighted vision: uncertainty about the possible substitutes of fossile energy or about the future technologies; the idea also of sequential decisions: due to the inability to have a precise idea of the future, just making decisions that do not handicap this future with the intuition that perhaps completely new and impredictable decisions should be made later. Furthermore, it's striking to see that many concrete inititiatives in the field of climate change control are just commitments for a given period and do not schedule any further action. See for instance the EU - ETS implemented for 2013 - 2020, with nothing for later.

[11] It's assumed there is no absorption of the pollution stock. Hence, if Z is this stock: $Z - Z_0 = X_0 - X$. Hence: $d\,(Z - Z_0)^2 = d\,(X - X_0)^2$.

Anyway, it implies in particular that the players do not mind at all any scrap value at date T. Technically this assumption will make the game solvable[12].

Thirdly, there is one more assumption relative to the producers' stance: it's assumed that they do not take into account the scarcity rent when working out their producer price in the dynamic game: this one is always equal to c_1. Again, this simplification is justified by the focus on the relation between the two consuming areas.

Finally, in the game, the players will use Open Loop strategies to make the game tractable.

The other assumptions are not changed (in particular the transfer is the same), except of course the introduction of a discount rate ρ.

There are also new exogenous parameters: the discount rate ρ, T and also the initial fossil energy stock X_0[13]

2.2 The passive case

When both areas are passive in front of the environmental damage, though they bear its consequences on welfare, it's quite possible that the fossil resource stock will be used up before T[14]. At the same time, for the same values of parameters, it's quite possible that the resource will not be used up at this date in the game, because of the pressure on consumption resulting of the setting up of taxes in both areas (it will be the case with our assumptions).

[12] Technically, the same game with a scrap value would not have any solution, as it can be shown. This is consistent with the fact that the same game with an infinite horizon would either have no solution (after all the infinite game is only the game with $T \to \infty$). This is easy to see for this infinite game: look at the would - be (linear and unique) solution; then: $(x_A)_\infty = (x_B)_\infty = 0 \Rightarrow q_\infty = \theta_\infty = a - c_1$; however, across the board, $q_\infty \neq \theta_\infty$. Contradiction and hence no solution.

[13] For the simulations, the values of the new parameters are:
$T = 200; X_0 = 2000; \rho = 0.05$.

[14] With our values of parameters it will happen at $T_m = 32 < 200$.

Never mind, for this reference case (R):

$$\begin{aligned}
(x_A)_R &= (x_B)_R = \frac{(a-c_1)}{b} \\
x_R &= N\frac{(a-c_1)}{b} \\
X_R &= X_0 - N\frac{(a-c_1)}{b}t \\
T_m &= \frac{X_0 b}{N(a-c_1)}
\end{aligned}$$

And:

$$\frac{VA_R}{N(1-n)} = \frac{VB_R}{Nn} = \int_0^{T_m} e^{-\rho t}[\frac{(a-c_1)^2}{2b} - d(X_R - X_0)^2]dt - \int_{T_m}^{T} e^{-\rho t} d(X_0)^2]dt \tag{IV.36}$$

The optimum case, of course, would give a better payoff to both areas but it's assumed to be beyond their possibilities. See the appendix for the study of this optimum case.

2.3 If only area B fights the environmental damage

As in the static game the windfall effect would come from the slower decrease of the stock of fossil energy in the soil resulting of the setting up of a carbon tax in area B. This slower decrease would bring down the environmental damage area A bears and hence would raise its welfare. The result is however the same as in the static game: area A is not urged to fight the environmental damage if area B acts unilaterally. This is a schematic illustration, in a dynamic setting, of the fact that unilateral actions such as those taken by Europe against the climate change are not very efficient since the rest of the world benefits from these actions without doing anything. To be efficient Europe must find a way to make the other areas going into the fight against climate change.

In this case of unilateral action:

$$\max_{\theta} \int_0^T e^{-\rho t} \left[nNu\left(x_B\right) - nNc_1 x_B - nNd\left(X - X_0\right)^2 \right] dt \tag{IV.37}$$

subject to:

$$\begin{aligned} \dot{X} &= -N\left[(1-n)\, x_A + n x_B\right] \qquad (\lambda_B) \\ X(0) &= X_0 \end{aligned}$$

with:

$$x_B = \left(\frac{1}{b}\right)(a - c_1 - \theta) \tag{IV.38}$$

Then, if λ_B is the shadow cost of the stock of pollution for area B:

$$\tilde{H} = \begin{bmatrix} nNu\left(x_B\right) - nNc_1 x_B - nNd\left(X - X_0\right)^2 \\ -N\left[(1-n)\, x_A + n x_B\right] \lambda_B \end{bmatrix}$$

All this implies the following Foc:

$$nN\left(u'\left(x_B\right) - c_1\right)\left(-\frac{1}{b}\right) - Nn\lambda_B\left(-\frac{1}{b}\right) = 0$$

$$\Longrightarrow \theta = \lambda_B \tag{IV.39}$$

It implies:

$$\dot{\theta}_B = \rho\theta + 2nNd\left(X - X_0\right) \tag{IV.40}$$

The transversality condition is, knowing that the current Hamiltonian is used here instead of the Hamiltonian and that we must have $X(T) \geq 0$:

$$\lambda_B(T)\, X(T)\, e^{-\rho T} = 0, X(T) \geq 0, \lambda_B(T)\, e^{-\rho T} \geq 0$$

However:

$$e^{-\rho T} \neq 0$$

Then:

$$\lambda_B(T) X(T) = 0, X(T) \geq 0, \lambda_B(T) \geq 0 \tag{IV.41}$$

For area A:

$$x_A = \frac{1}{b}(a - c_1)$$

And for both areas:

$$\dot{X} = -\frac{(1-n)N}{b}(a - c_1) - \frac{nN}{b}(a - c_1 - \theta)$$

$$\dot{X} = -\frac{N}{b}(a - c_1) + \frac{nN}{b}\theta \tag{IV.42}$$

Its not worth solving completely (it can be done easily) to show the windfall effect: note only that, because of the factor $\frac{nN}{b}\theta$, $\dot{X}$ is superior to what it would be if no area minded the environmental damage (though bearing it): $-\frac{N}{b}(a - c_1)$.

Hence $d(X - X_0)^2$ is smaller than $d(X_R - X_0)^2$and then the payoff of area A increases as compared to the passive case. Indeed:

If unilateral action of area B, the payoff of area A would be[15]:

$$(1-n)N \int_0^{\tilde{T}} e^{-\rho t}\left[u(x_A) - c_1 x_A - d(X - X_0)^2\right] dt - \int_{\tilde{T}}^{T} e^{-\rho t} d(X_0)^2] dt$$
$$= (1-n)N \int_0^{\tilde{T}} e^{-\rho t}[\frac{(a - c_1)^2}{2b} - d(X - X_0)^2] dt - \int_{\tilde{T}}^{T} e^{-\rho t} d(X_0)^2] dt$$

To compare with the passive case payoff:

$$(1-n)N \int_0^{T_m} e^{-\rho t}[\frac{(a - c_1)^2}{2b} - d(X_R - X_0)^2] dt - \int_{T_m}^{T} e^{-\rho t} d(X_0)^2] dt$$

The result is obvious as -$d(X_R - X_0)^2 < -\, d(X - X_0)^2$ and $\tilde{T} > T_m$

15 $\tilde{T}$ could be equal to T, but it's no worth knowing it. Furthermore, as area B acts, $\tilde{T} > T_m$.

2.4 The problems of the areas in the dynamic Open Loop game

Area B puts up a carbon tax θ. Area A is urged to act by the transfer it gets from area B and it sets up a tax q to fight the environmental damage. The players play an Open Loop game as they are in fact in rivalry and cannot strike a deal allowing them to reach the world optimum. This is a schematic illustration in a dynamic setting of what could be done by the old rich countries to get the other countries to act: subsidizing them to make them setting up a form of carbon tax; however, these old rich countries should be aware that full cooperation between the whole world is likely to be only a fairy tale: though they can cooperate in some way ("a form of carbon tax against a transfer"), the poor and above all emergent countries on one side and the old rich countries on the other side are in fact in rivalry for many reasons...This is the basis for this dynamic game where they fight against each other while agreeing to cope in some way with the environmental damage at the same time.

For area B:

$$\max_{\theta} \int_0^T e^{-\rho t} \left[nNu\left(x_B\right) - nNc_1 x_B - nNd\left(X - X_0\right)^2 - \frac{\left(1-n\right)N}{2b} q\theta \right] dt \quad \text{(IV.43)}$$

subject to:

$$\dot{X} = -N\left[\left(1-n\right)x_A + nx_B\right] \qquad (\lambda_B)$$
$$X\left(0\right) = X_0$$

with:

$$x_B = \left(\frac{1}{b}\right)\left(a - c_1 - \theta\right) \qquad \text{(IV.44)}$$

Then, if λ_B is the shadow cost of the stock of pollution for area B:

$$\tilde{H} = \begin{bmatrix} nNu\left(x_B\right) - nNc_1x_B - nNd\left(X - X_0\right)^2 - \frac{(1-n)N}{2b}q\theta \\ -N\left[\left(1-n\right)x_A + nx_B\right]\lambda_B \end{bmatrix}$$

All this implies the following FOC:

$$nN\left(u'\left(x_B\right) - c_1\right)\left(-\frac{1}{b}\right) - \frac{\left(1-n\right)N}{2b}q - Nn\lambda_B\left(-\frac{1}{b}\right) = 0$$

That is:

$$\lambda_B = \theta + \frac{\left(1-n\right)}{2n}q \qquad \text{(IV.45)}$$

And:

$$\dot{\lambda}_B = \rho\lambda_B + 2nNd\left(X - X_0\right) \qquad \text{(IV.46)}$$

The transversality condition is, knowing that the current Hamiltonian is used here instead of the Hamiltonian and that we must have $X\left(T\right) \geq 0$:

$$\lambda_B\left(T\right)X\left(T\right)e^{-\rho T} = 0, X\left(T\right) \geq 0, \lambda_B\left(T\right)e^{-\rho T} \geq 0$$

However:

$$e^{-\rho T} \neq 0$$

Then:

$$\lambda_B\left(T\right)X\left(T\right) = 0, X\left(T\right) \geq 0, \lambda_B\left(T\right) \geq 0 \qquad \text{(IV.47)}$$

For area A:

$$\max_q \left(1-n\right)N\int_0^T e^{-\rho t}\left[u\left(x_A\right) - c_1x_A - d\left(X - X_0\right)^2 + \frac{1}{2b}q\theta\right]dt \qquad \text{(IV.48)}$$

subject to:

$$\dot{X} = -N\left[(1-n)\,x_A + nx_B\right] \qquad (\lambda_A)$$
$$X(0) = X_0$$

with:

$$x_B = \left(\frac{1}{b}\right)(a - c_1 - q) \tag{IV.49}$$

Then, if λ_A is the shadow cost of the stock of pollution for area A:

$$\tilde{H} = \begin{array}{c} (1-n)\,N[u\,(x_A) - c_1 x_A - d\,(X - X_0)^2 + \frac{1}{2b}q\theta] \\ -N\left[(1-n)\,x_A + nx_B\right]\lambda_A \end{array}$$

All this implies the following FOC:

$$(u^{,}\,(x_A) - c_1)\left(-\frac{1}{b}\right) + \frac{\theta}{2b} - \lambda_A\left(-\frac{1}{b}\right) = 0$$

That is:

$$\lambda_A = q - \frac{\theta}{2} \tag{IV.50}$$

And:

$$\dot{\lambda}_A = \rho\lambda_A + 2\,(1-n)\,Nd\,(X - X_0) \tag{IV.51}$$

$$\lambda_A\,(T)\,X\,(T) = 0, X\,(T) \geq 0, \lambda_A\,(T) \geq 0 \tag{IV.52}$$

2.5 The equilibrium

From the previous equations:

$$\frac{\lambda_A}{1-n} = \frac{\lambda_B}{n} \tag{IV.53}$$

For every country in either area, the shadow cost of the stock of pollution must be the same. Hence:

$$\begin{aligned}\lambda_B &= \theta + \frac{(1-n)}{2n}q\\ \frac{(1-n)}{n}\lambda_B &= q - \frac{\theta}{2}\end{aligned}$$

$$q = \frac{2\,(2-n)}{3n+1}\lambda_B \tag{IV.54}$$

$$\theta = \frac{2\,(n^2+2n-1)}{n(3n+1)}\lambda_B \tag{IV.55}$$

We would like to have:

$$\theta \geq 0, q \geq 0, \theta - q \geq 0$$

With $n > \frac{1}{\sqrt[2]{2}}$, $\theta - q \geq 0$ is true and the other inequalities are satisfied. From now on, let's assume that $n > \frac{1}{\sqrt[2]{2}} \sim 0.7$.

If $t \leq T$:

$$\begin{aligned}a + \frac{b}{N}\dot{X} &= c_1 + (1-n)\,q + n\theta\\ &= c_1 + 2\lambda_B\left(\frac{2n^2-n+1}{3n+1}\right)\end{aligned}$$

It implies:

$$\begin{aligned}\frac{b}{N}\ddot{X} &= 2\left(\frac{2n^2-n+1}{3n+1}\right)\left(\rho\lambda_B + 2nNd\,(X-X_0)\right)\\ &= 2\left(\frac{2n^2-n+1}{3n+1}\right)\left[\rho\left(a+\frac{b}{N}\dot{X}-c_1\right)\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{3n+1}{2n^2-n+1}\right)+2nNd\,(X-X_0)\right]\end{aligned}$$

It comes:

$$\frac{b}{N}\ddot{X}-\rho\frac{b}{N}\dot{X}-\frac{4nNd\left(2n^2-n+1\right)X}{3n+1}=\rho(a-c_1)-\frac{4nNd\left(2n^2-n+1\right)X_0}{3n+1} \quad \text{(IV.56)}$$

Let's call U:

$$U=\frac{4nNd\left(2n^2-n+1\right)}{3n+1} \quad \text{(IV.57)}$$

$$\frac{b}{N}\ddot{X}-\rho\frac{b}{N}\dot{X}-UX=\rho(a-c_1)-UX_0 \quad \text{(IV.58)}$$

If we consider the equation:

$$\frac{b}{N}r^2-\rho\frac{b}{N}r-U=0 \quad \text{(IV.59)}$$

The roots are:

$$r_1,r_2=\frac{\rho}{2}\left(1\pm\sqrt[2]{1+\frac{4NU}{\rho^2 b}}\right) \quad \text{(IV.60)}$$

And:

$$X\left(t\right)=Ae^{r_1 t}+Be^{r_2 t}+X_0-\frac{\rho(a-c_1)}{U} \quad \text{(IV.61)}$$

It's the moment now to use the transversality condition:

$$\lambda_B\left(T\right)X\left(T\right)=0, X\left(T\right)\geq 0, \lambda_B\left(T\right)\geq 0$$

Let's rule out for economic reasons the case $X\left(T\right)=0$. This case covers all the situations in which $X\left(t\right)=0$ from T_m on with $T_m<T$. In these situations during $[T_m,T]$ there would not be any oil consumption[16], which is for the least a poor case for both areas...

Then let's find the conditions for $X\left(T\right)>0 \Longrightarrow \lambda_B\left(T\right)=0$. Note also that $\lambda_B\left(T\right)=0$ has the meaning that, as the planning horizon stops in T since the

[16] Furthermore the problem should be reformulated with T_m as a free terminal - date.

players are short - sighted, the shadow cost of the stock of pollution has no longer any importance in this date and thus is equal to zero.

As $T >> 0$:

$$X\left(T\right) \sim Ae^{r_1 T} + X_0 - \frac{\rho(a-c_1)}{U}$$

$$\begin{aligned} X\left(T\right) > 0 &\Longleftrightarrow Ae^{r_1 T} + X_0 - \frac{\rho(a-c_1)}{U} > 0 \\ &\Longleftrightarrow A > (\frac{\rho(a-c_1)}{U} - X_0)e^{-r_1 T} \end{aligned}$$

As $\dot{X}\left(T\right) \leq 0$ requires A to be negative since $\dot{X}\left(T\right) \sim Ar_1 e^{r_1 T}$, it's necessary to have:

$$\frac{\rho(a-c_1)}{U} - X_0 < 0$$

However we know $\dot{X}\left(T\right)$:

$$\begin{aligned} \lambda_B\left(T\right) = 0 &\Longrightarrow \theta\left(T\right) = 0 = q\left(T\right) \\ &\Longrightarrow \dot{X}\left(T\right) = -\frac{N}{b}(a-c_1) \sim Ar_1 e^{r_1 T} \\ &\Longrightarrow A \sim -\frac{N}{br_1}(a-c_1)e^{-r_1 T} \end{aligned}$$

Then our condition becomes:

$$\begin{aligned} -\frac{N}{br_1}(a-c_1)e^{-r_1 T} &> (\frac{\rho(a-c_1)}{U} - X_0)e^{-r_1 T} \\ (a-c_1)\left(\frac{\rho}{U} + \frac{N}{br_1}\right) &< X_0 \\ \text{or } (a-c_1)\left(\frac{\rho br_1 + NU}{Ubr_1}\right) &< X_0 \end{aligned}$$

Knowing the equation in r it comes[17]:

$$(a-c_1)r_1 < UX_0 \tag{IV.62}$$

[17] $r_1 > \rho$ and hence the previous condition $X_0 U > \rho\left(a-c_1\right)$ is satisfied if $X_0 U > r_1\left(a-c_1\right)$.

r_1 and U are functions of d:

$$\frac{r_1(d)}{U(d)} < \frac{X_0}{(a-c_1)} \tag{IV.63}$$

The LHS is a decreasing function of d, that tends towards $+\infty$ when $d \to 0_+$ and that tends towards 0 when $d \to +\infty$. Hence it exists d_1 such that:

$$d > d_1 \Longleftrightarrow \frac{r_1(d)}{U(d)} < \frac{X_0}{(a-c_1)} \Longleftrightarrow X(T) > 0 \tag{IV.64}$$

From now on, $d > d_1$[18]. Note that d_1 depends in particular on X_0 and is decreasing with it as:

$$\frac{r_1(d_1)}{U(d_1)} = \frac{X_0}{(a-c_1)}$$

The reason of the condition $d > d_1$ is that the solution has been constrained to be such that $X(T) > 0$. This could not happen if damage were very "small" since in this case the profile would be very near the passive case and oil would be used up before T.

From the two following equations the coefficients A and B can be worked out:

$$\begin{aligned} A + B &= \frac{\rho(a-c_1)}{U} \\ Ar_1e^{r_1T} + Br_2e^{r_2T} &= -\frac{N}{b}(a-c_1) \end{aligned}$$

$$A = -\frac{\rho}{U}(a-c_1)\left[\frac{\left(\frac{NU}{\rho b} + r_2e^{r_2T}\right)}{r_1e^{r_1T} - r_2e^{r_2T}}\right] \tag{IV.65}$$

$$B = \frac{\rho}{U}(a-c_1)\left[\frac{\left(\frac{NU}{\rho b} + r_1e^{r1T}\right)}{r_1e^{r_1T} - r_2e^{r_2T}}\right] \tag{IV.66}$$

For any further purpose, however, only the approximations are necessary (note

[18] With our values of parameters, $d \sim 0.0002$, that is a very "small" value of damage.

that $T >> 0$):

$$\begin{aligned}
A &\sim -\frac{N}{br_1}(a-c_1)e^{-r_1T} \\
B &\sim \frac{\rho}{U}(a-c_1) \\
X(t) &\sim (a-c_1)\left[-\frac{N}{br_1}e^{r_1(t-T)}+\frac{\rho}{U}e^{r_2t}\right]+X_0-\frac{\rho}{U}(a-c_1) \\
x(t) &\sim (a-c_1)\left[\frac{N}{b}e^{r_1(t-T)}-\frac{\rho}{U}r_2e^{r_2t}\right]
\end{aligned}$$

From:

$$\begin{aligned}
\dot{\lambda}_B &= \rho\lambda_B + 2nNd\,(X-X_0) \\
\lambda_B(T) &= 0
\end{aligned}$$

It comes:

$$\lambda_B = \int_t^T 2nNd\,(X_0-X)\,e^{-\rho t}dt \geq 0 \tag{IV.67}$$

The shadow cost λ_B is then strictly positive when $t < T$ and nil when $t = T$. The carbon tax θ and the tax q have the same temporal profile.

$$\lambda_B = \left(\frac{3n+1}{2\,(2n^2-n+1)}\right)(a+\frac{b}{N}\dot{X}-c_1) \tag{IV.68}$$

or:

$$\lambda_B \sim \left(\frac{3n+1}{2\,(2n^2-n+1)}\right)(a-c_1)\left[1-e^{r_1(t-T)}+\frac{\rho b}{NU}r_2e^{r_2t}\right]$$

The consumption of area A is always positive if $n > \frac{1}{\sqrt[2]{2}}$:

$$x_A = \frac{(a-c_1)\,(2n^2-1)-\frac{b}{N}\dot{X}\,(2-n)}{b\,((2n^2-n+1))} > 0 \tag{IV.69}$$

As far as area B consumption is concerned:

$$x_B = \frac{(a - c_1)\left(2n^2 - 1\right)(n-1) - \frac{b}{N}\dot{X}\left(n^2 + 2n - 1\right)}{bn\left(\left(2n^2 - n + 1\right)\right)} \tag{IV.70}$$

It's a bit tricky to find a condition for it to be positive. Firstly:

$$\dot{x}_B = \frac{-\frac{b}{N}\ddot{X}\left(n^2 + 2n - 1\right)}{bn\left(\left(2n^2 - n + 1\right)\right)} = -2\dot{\lambda}_B\left(\frac{\left(n^2 + 2n - 1\right)}{bn(3n+1)}\right) \tag{IV.71}$$

At the date 0, $\dot{\lambda}_B = \rho\lambda_B > 0$: hence $\dot{x}_B(0) < 0$. At the date T, $\dot{\lambda}_B < 0$ as the shadow cost is strictly positive just before this date and nil at this date: hence $\dot{x}_B(T) > 0$. Then area B consumption is decreasing then increasing with time and has a minimum between date 0 and date T. Of course $x_B(T) = \frac{a-c_1}{b} > 0$. The proof now relies on the fact that, if $x_B(0) > 0$, then x_B is always positive. Indeed, if $x_B(T) > 0$ and $x_B(0) > 0$, the minimum of x_B could not be negative: if by chance it were the case, by continuity there should be two roots in t such that x_B be nil but this is impossible as an equation of the following type has no root or only one and never two:

$$-Ke^{r_1 t} + G = Fe^{r_2 t}$$

With $K, G, F > 0$.

Therefore let's focus on the condition for $x_B(0) > 0$.

$$x_B(0) \sim \frac{(a - c_1)\left[\left(2n^2 - 1\right)(n-1) - \frac{\rho b r_2}{NU}\left(n^2 + 2n - 1\right)\right]}{D > 0}$$

The condition is thus:

$$-\frac{r_2(d)}{U(d)} > \frac{\left(2n^2 - 1\right)(1-n)N}{\rho b\left(n^2 + 2n - 1\right)} \tag{IV.72}$$

The LHS is a decreasing function of damage and tends towards $+\infty$ when $t \rightharpoonup 0_+$. It tends towards 0 when $t \to +\infty$. Hence it exists d_2 such that $d < d_2 \Longrightarrow x_B(0) >$

$0 \Longrightarrow x_B(t) > 0$, whatever t before T. We have[19]:

$$-\frac{r_2(d_2)}{U(d2)} = \frac{(2n^2-1)(1-n)N}{\rho b(n^2+2n-1)} \tag{IV.73}$$

We have now two conditions on damage:

$$d_1 < d < d_2 \tag{IV.74}$$

We must therefore check that:

$$d_1 < d_2$$

d_2 does not depend on X_0. For our values of parameters $d_2 \sim 0.18 > d_1 = 0.0002$ and there is no problem. d_2 does not depend on X_0, while d_1 does. As d_1 is decreasing with X_0 there could happen that $d_2 < d_1$ but only for very "small" initial stocks of fossil resource: let's rule out this possibility and assume that the resource stock is sufficient to have $d_1 < d_2$. The condition for that is:

$$X_0 > (a-c_1)\frac{r_1(d_2)}{U(d_2)} \tag{IV.75}$$

This condition means that the initial stock X_0 must be sufficient to warrant that the final energy stock is strictly positive in date T when the consumption in area B is strictly positive (if on the contrary $X_0 < (a-c_1)\frac{r_1(d_2)}{U(d_2)}$ and hence $d_1 > d_2$, as we must have $d < d_2$ to get a positive consumption in area B, $d < d_2 < d_1$ implies that the energy stock should be used up at date T, that is that $X(T) = 0$)

Finally, there are the following conditions for the Open Loop game to have an

[19] d_2 does not depend on the initial stock X_0.

economic solution:

$$
\begin{aligned}
& n > \frac{1}{\sqrt[2]{2}} \\
& d_1 < d < d_2 \\
& X_0 > (a - c_1)\frac{r_1(d_2)}{U(d_2)}
\end{aligned}
\tag{IV.76}
$$

Let's sum up in economic terms the conditions for the game to have the appropriate solution: area A must be a fringe and in no case a majority of countries for keeping the carbon tax in area A smaller than that in area B, the fossil resource stock must be sufficient for the resource not to be used up in the date T when consumption in area B is positive; damage must be between two limits, d_1 that depends on X_0 and d_2 that does not depend on the initial stock. Note why damage must be inferior to d_2: if damage were "high", oil consumption in area B would be squeezed by a very high carbon tax. For the condition $d > d_1$ develop our previous comments. Let's assume that for the passive case the resource is used up (it's the case with the values of our paramaters as seen above); then if damage were very low the correction of the trajectory due to the setting up of carbon taxes in the game solution would be very small and the resource would be used up in date T as in the passive case that would be very near it.

It's easy to prove[20] that the game solution is less conservative than the optimal solution in terms of fossil energy stock in the soil, as intuition suggests.

2.6 Payoffs

The aim here is to see if both areas get wealthier if they play the game instead of being passive in front of the environmental damage

2.6.1 The reference case

We have:

[20] See the appendix.

$$\frac{VA_R}{N(1-n)} = \frac{VB_R}{Nn} = \int_0^{T_m} e^{-\rho t}[\frac{(a-c_1)^2}{2b} - d(X_R - X_0)^2]dt - \int_{T_m}^{T} e^{-\rho t} d(X_0)^2]dt$$

2.6.2 The game case

For the game case (g) one can get:

$$\frac{VA_g}{N(1-n)} = \int_0^{T} e^{-\rho t}[\frac{(a-c_1)^2}{2b} - d(X_g - X_0)^2]dt + \int_0^{T} e^{-\rho t} \frac{q(\theta - q)}{2b} dt \quad \text{(IV.77)}$$

$$\frac{VB_g}{Nn} = \int_0^{T} e^{-\rho t}[\frac{(a-c_1)^2}{2b} - d(X_g - X_0)^2]dt - \int_0^{T} e^{-\rho t} \frac{\theta(n\theta + (1-n)q)}{2nb} dt \quad \text{(IV.78)}$$

Note that for $t \leq T_m$:

$$(x_A)_g = \frac{1}{b}(a - c_1 - q) < (x_A)_R = \frac{(a-c_1)}{b}$$
$$(x_B)_g = \frac{1}{b}(a - c_1 - \theta) < (x_B)_R = \frac{(a-c_1)}{b}$$

$$\Longrightarrow (x)_g < (x_R)$$
$$\Longrightarrow (X)_g > (X_R) > 0$$
$$\Longrightarrow -d(X_g - X_0)^2 > -d(X_R - X_0)^2$$

Between T_m and T:

$$(X)_g > (X_R) = 0$$
$$\Longrightarrow -d(X_g - X_0)^2 > -d(X_0)^2$$

And then:

$$\frac{VA_g}{N(1-n)} > \frac{VA_R}{N(1-n)} \tag{IV.79}$$

Clearly area A takes advantage of the game and this is a strong argument for this area to enter into the process "a tax against a subsidy".

As far as area B is concerned, the result is less immediate . The best way is to use simulation. The result is that with our our values of parameters, for damage between d_1 and d_2 (see appendix IV.B):

$$\frac{VBg}{nN} > \frac{VB_R}{nN} \tag{IV.80}$$

This confirms that area B has also interest to have a strategic stance.

Conclusion: with some adaptations the dynamic game gives the same result as the static game.

The dynamic game, in particular, is an attempt to capture the ambiguity of the relationship between the old rich countries and the poor and emergent ones, as far as the fight against the climate change is concerned. To my knowledge this is not a very well explored aspect until now. Of course there are particular assumptions that are needed to get a solvable and tractable game as the absence of a scrap value at the end of the planning horizon or the use of the Open Loop scheme instead of the Markovian one. Further research that could overtake these limitations would be useful. It can be thought indeed that this rivalry between consuming countries about climate change or other economic issues could be one of the leading trends of the new century.

IV.A The dynamic optimum

As in the static game the word regulator (if it existed) would maximize the sum of the payoffs of the two consuming areas.

Hence its problem would be:

$$\max_{x_A,x_B} nN \int_0^T e^{-\rho t}(u(x_B) - c_1 x_B - d(X - X_0)^2)dt +$$
$$(1-n)N \int_0^T e^{-\rho t}(u(x_A) - c_1 x_A - d(X - X_0)^2)dt \tag{IV.81}$$

s t: $\dot{X} = -N[(1-n)x_A + nx_B] \quad (\lambda)$

$X(0) = X_0$

$$\begin{aligned}\tilde{H} &= nN(u(x_B) - c_1 x_B - d(X - X_0)^2)\\ &\quad + (1-n)N(u(x_A) - c_1 x_A - d(X - X_0)^2)\\ &\quad - \lambda N((1-n)x_A + nx_B)\end{aligned}$$

Hence:

$$u'(x_B) - c_1 = \lambda = u'(xA) - c_1$$
$$\Longrightarrow x_A = x_B$$

And:

$$\dot{\lambda} = \rho\lambda + 2Nd(X - X_0) \tag{IV.82}$$

The transversality condition is, knowing that the current Hamiltonian is used here instead of the Hamiltonian and that we must have $X(T) \geq 0$:

$$\lambda(T)X(T)e^{-\rho T} = 0, X(T) \geq 0, \lambda(T)e^{-\rho T} \geq 0$$

However:

$$e^{-\rho T} \neq 0$$

Then:

$$\lambda(T) X(T) = 0, X(T) \geq 0, \lambda(T) \geq 0 \tag{IV.83}$$

However:

$$a + \frac{b\dot{X}}{N} = c_1 + \lambda$$

It comes:

$$\begin{aligned} \frac{b\ddot{X}}{N} &= \dot{\lambda} = \rho\lambda + 2Nd(X - X_0) \\ &= \rho\left(a + \frac{b\dot{X}}{N} - c_1\right) + 2Nd(X - X_0) \end{aligned}$$

Hence:

$$\frac{b\ddot{X}}{N} - \rho\frac{b\dot{X}}{N} - 2NdX = \rho(a - c_1) - 2NdX_0 \tag{IV.84}$$

If we consider the equation:

$$\frac{b}{N}u^2 - \rho\frac{b}{N}u - 2Nd = 0 \tag{IV.85}$$

The roots are:

$$u_1, u_2 = \frac{\rho}{2}\left(1 \pm \sqrt[2]{1 + \frac{8N^2 d}{\rho^2 b}}\right) \tag{IV.86}$$

and:

$$X_{optimal}(t) = Ce^{u_1 t} + De^{u_2 t} + X_0 - \frac{\rho(a - c_1)}{2Nd} \tag{IV.87}$$

It's the moment now to use the transversality condition:

$$\lambda(T) X_{optimal}(T) = 0, X_{optimal}(T) \geq 0, \lambda(T) \geq 0$$

Let's rule out for economic reasons the case $X_{optimal}(T) = 0$. This case covers all the situations in which $X_{optimal}(t) = 0$ from some date $\tilde{T}$ on with $\tilde{T} < T$. In these situations during $\left[\tilde{T}, T\right]$ there would not be any oil consumption, which is for the least a poor case.

Then let's find the condition for $X_{optimal}\left(T\right) > 0 \Longrightarrow \lambda\left(T\right) = 0$. As in the game case, it is:

$$(a - c_1)u_1 < 2NdX_0 \tag{IV.88}$$

Or:

$$\frac{u_1\left(d\right)}{2Nd} < \frac{X_0}{(a - c_1)}$$

The LHS is a decreasing function of d, that tends towards $+\infty$ when $d \to 0_+$ and that tends towards 0 when $d \to +\infty$. Hence it exists $\tilde{d}$ such that:

$$d > \tilde{d} \Longleftrightarrow \frac{u_1\left(d\right)}{2Nd} < \frac{X_0}{(a - c_1)} \Longleftrightarrow X_{optimal}\left(T\right) > 0 \tag{IV.89}$$

$\tilde{d}$ depends in particular on X_0 and is decreasing with it as:

$$\frac{u_1\left(\tilde{d}\right)}{2N\tilde{d}} = \frac{X_0}{(a - c_1)}$$

The reason of the condition $d > \tilde{d}$ is that the solution has been constrained to be such that $X_{optimal}\left(T\right) > 0$. This could not happen if damage were very "small" since in this case the profile would be very near the passive case and oil would be used up before T. It can be proved that:

$$\tilde{d} < d_1 \tag{IV.90}$$

Hence, when assuming $d > d_1$ it's consistent to compare a game case where the fossil energy stock is not used up in T with an optimum case where the fossil energy stock is also not used up in T ($d > d_1 \Longrightarrow d > \tilde{d}$).

From the two following equations the coefficients C and D can be worked out:

$$C + D = +\frac{\rho(a-c_1)}{2Nd} \qquad \text{(IV.91)}$$
$$Cu_1e^{u_1T} + Du_2e^{u_2T} = -\frac{N}{b}(a-c_1)$$

For any further purpose, however, only the approximations are necessary (note that $T >> 0$):

$$C \sim -\frac{N}{bu_1}(a-c_1)e^{-u_1T}$$
$$D \sim \frac{\rho}{2Nd}(a-c_1)$$
$$X_{optimal}\left(t\right) \sim (a-c_1)\left[-\frac{N}{bu_1}e^{u_1(t-T)} + \frac{\rho}{2Nd}e^{u_2t}\right] + X_0 - \frac{\rho}{2Nd}(a-c_1)$$
$$x_{optimal}\left(t\right) \sim (a-c_1)\left[\frac{N}{b}e^{u_1(t-T)} - \frac{\rho}{2Nd}u_2e^{u_2t}\right] = N\left(x_A\right)_{optimal} = N\left(x_B\right)_{optimal}$$

Then:

$$\frac{VA_{optimal}}{N\left(1-n\right)} = \frac{VB_{optimal}}{Nn} = \int_0^T e^{-\rho t}\left[u\left(x_B\right) - c_1x_B - d\left(X_{optimal} - X_0\right)^2\right]dt$$
$$= \int_0^T e^{-\rho t}\left[\frac{b}{2}x_B^2 + \lambda x_B - d\left(X_{optimal} - X_0\right)^2\right]dt$$

$$\frac{VA_{optimal}}{N\left(1-n\right)} = \frac{VB_{optimal}}{Nn} = \int_0^T e^{-\rho t}[\frac{\left(a-c_1\right)^2}{2b} - d\left(X_{optimal} - X_0\right)^2]dt - \int_0^T e^{-\rho t}\frac{\lambda^2}{2b}dt \qquad \text{(IV.92)}$$

It's not difficult to prove that whatever the date before T:

$$x_{optimal}\left(t\right) < x_{game}\left(t\right) \qquad \text{(IV.93)}$$

Indeed:

$$\begin{aligned} -Br_2 &> -Du_2 \\ e^{u_2 t} &< e^{r_2 t} \\ &\Longrightarrow -Br_2 e^{r_2 t} > -Du_2 e^{u_2 t} \end{aligned}$$

As far as A and C are concerned, note that in date T the two oil consumptions are equal:

$$\dot{X}_{optimal}\left(T\right) = \dot{X}_{game}\left(T\right) = -\left(a - c_1\right)\frac{N}{b}$$

It implies:

$$Ar_1 e^{r_1 T} \sim Cu_1 e^{u_1 T}$$

Hence, since $u_1 > r_1$:

$$\begin{aligned} & - Ar_1 e^{r_1 t} + Cu_1 e^{u_1 t} \\ & \sim -Ar_1 e^{r_1 t}\left(1 - e^{(u_1 - r_1)(t-T)}\right) > 0 \end{aligned}$$

Hence, if $x_{optimal}\left(t\right) < x_{game}\left(t\right)$ whatever t:

$$X_{optimal}\left(t\right) > X_{game}\left(t\right) \tag{IV.94}$$

The optimal solution is more conservative than the game solution in terms of fossil energy stock in the soil, as intuition suggests.

IV.B Figures

Static game

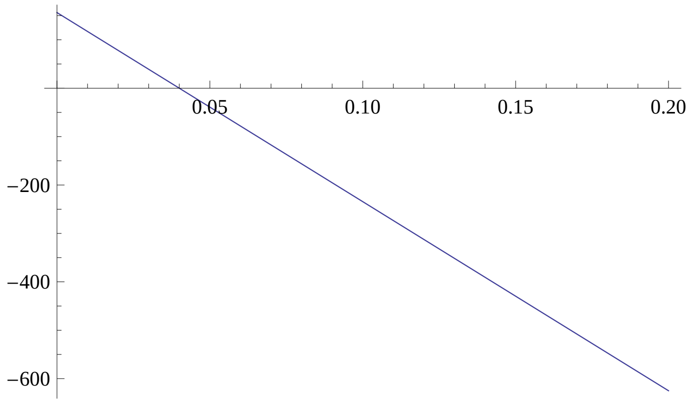

Figure IV.1: $\frac{VB1}{nN} = \frac{VA1}{(1-n)N}$ as a function of damage.

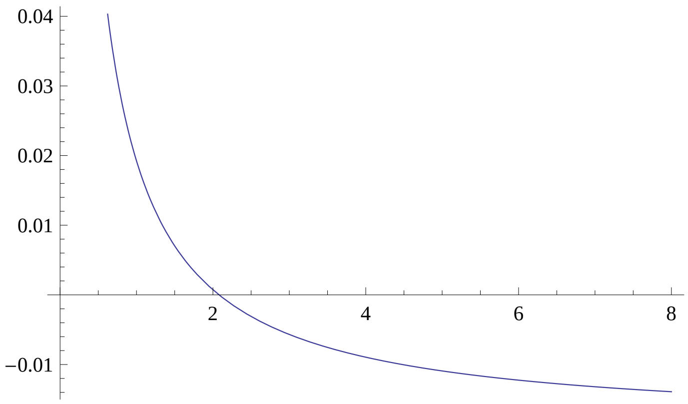

Figure IV.2: Area B consumption as a function of damage.

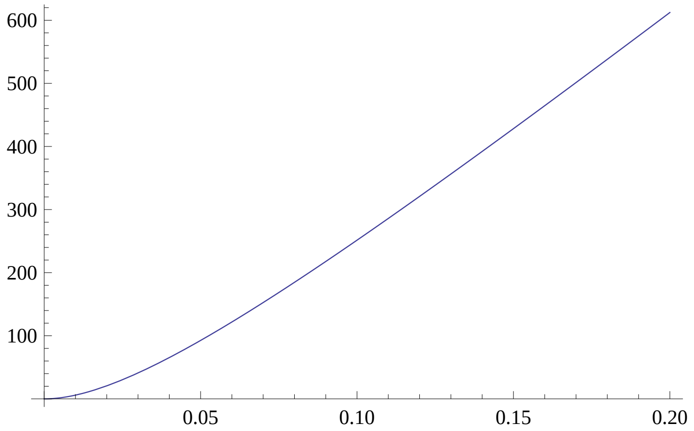

Figure IV.3: $\frac{VB3}{nN} - \frac{VB1}{nN}$ as a function of damage.

Dynamic game

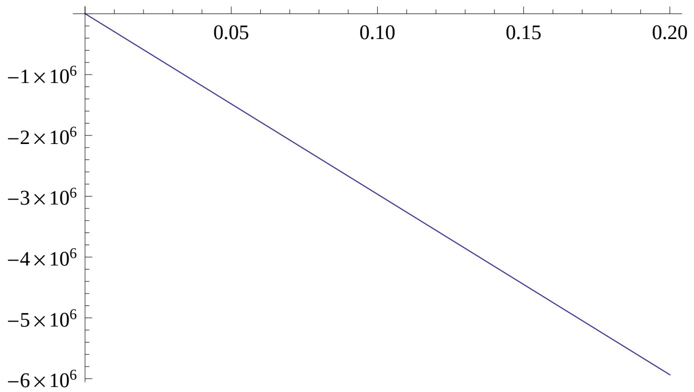

Figure IV.4: $\frac{VBR}{nN}$ as a function of damage between $d = d_1$ and $d = d_2$

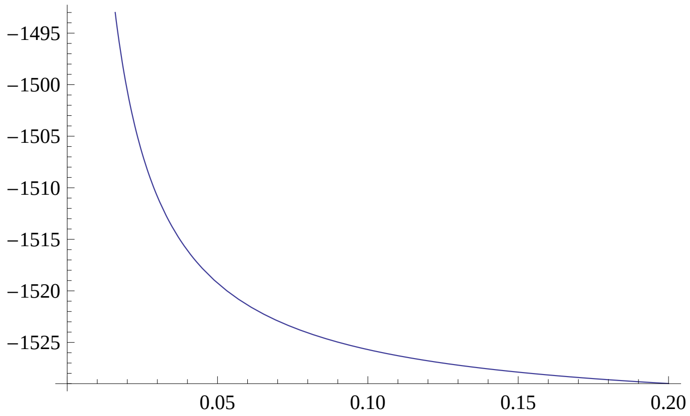

Figure IV.5: $\frac{VBg}{nN}$ as a function of damage between $d = d_1$ and $d = d_2$

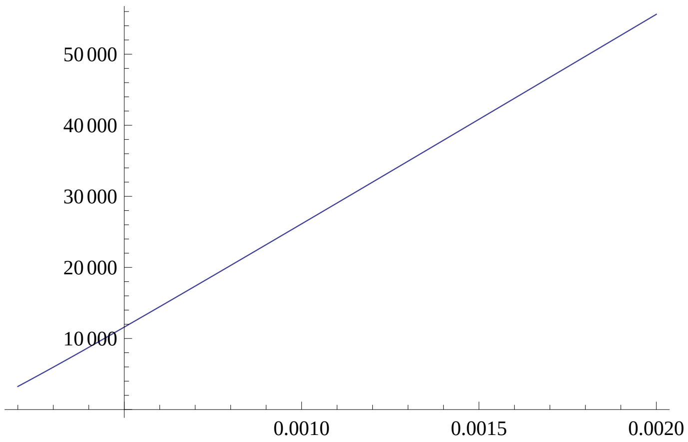

Figure IV.6: $\frac{VBg}{nN} - \frac{VBR}{nN}$ as a function of damage between $d = d_1$ and $d = d_2$

Chapter V

Conclusion

Les travaux ci-dessus sont d'abord des variations autour du thème de la meilleure taxe carbone possible dans un environnement de jeu dynamique qui s'écarte quelque peu du modèle classique d'une zone de production et d'une zone de consommation confrontée à un dommage quadratique (chapitres 2 à 4).

Dans le chapitre 2, le dommage environnemental n'est pas quadratique mais linéaire et surtout un plafond relatif au stock de CO_2 dans l'atmosphère est introduit, ce qui amène à une solution non linéaire donc non classique dont les caractéristiques en termes de taxe carbone et de payoffs sont différentes de celles du modèle habituel et notamment de celles de l'article de référence de Liski et Tahvonen (2004).

Dans les deux derniers chapitres, le dommage environnemental est classiquement quadratique mais on introduit l'idée de deux zones de consommation ayant des intérêts différents ou même divergents (cas du dernier chapitre). La première zone est la plus motivée pour lutter contre le changement climatique, tandis que la seconde zone est supposée n'être prête à s'engager dans une politique de ce type et à mettre en place une taxe carbone que si elle bénéficie d'un transfert de la part de la première zone. Ce modèle est inspiré de la différence de point de vue voire de la rivalité que l'on constate entre schématiquement les vieux pays riches d'une part et les pays pauvres et émergents d'autre part au sujet de la lutte contre le réchauffement climatique.

Dans le chapitre 3 le jeu (Markovien puis Stagewise Stackelberg) continue à se dérouler entre la zone des producteurs et la première zone de consommation. La seconde zone ne joue pas dans le jeu mais conclut un accord avec la première zone du type "mise en place d'une taxe carbone contre un transfert" qui lui permet de choisir le taux de transfert qui maximise son payoff . Il est à noter que dans ce cas il y a bien une taxe carbone mondiale unique, bien qu'elle ne soit pas optimale en termes parétiens.

Dans le dernier chapitre on va jusqu'au bout de la logique de confrontation entre les deux zones de consommation: chacune d'entre elles met en place sa propre taxe carbone car elles sont incapables de s'entendre; la seconde zone reçoit bien un transfert contre la mise en place d'une taxe carbone en son sein mais cette forme de coopération n'empêche pas qu'elles jouent l'une contre l'autre chacune cherchant à maximiser son payoff relativement à sa taxe carbone; la zone des producteurs est passive; il n'y a pas de taxe carbone mondiale mais cette situation de confrontation est quand même meilleure pour les deux zones de consommation que la situation de passivité face au cartel des producteurs et elle est aussi meilleure qu'une action purement unilatérale pour la première zone de consommation. Un jeu statique est d'abord étudié qui a l'avantage de la simplicité, puis un jeu dynamique est étudié et résolu qui est Open Loop pour obtenir une solution analytique. Ce dernier chapitre est donc une tentative de modéliser ce que pourrait être une politique de blocs de lutte contre le réchauffement climatique, certes non optimale mais peut - être la seule accessible.

Au total, dans un monde multipolaire, plutôt non coopératif que coopératif et dans lequel aucune puissance ne domine, ce thème de la rivalité entre blocs dans la lutte contre le réchauffement climatique paraît être un thème de recherche pour l'avenir car il est fort peu exploré jusqu'ici.

Une autre constante des travaux présentés ici est de confronter les payoffs des zones de consommation dans les situations non coopératives étudiées non seulement aux payoffs des situations parétiennes mais aussi et surtout à des situations pratiques qui dans le domaine de l'énergie fossile sont tout sauf optimales du fait d'une part de la cartellisation des producteurs et d'autre part de l'attitude des Etats consommateurs. On a choisi à la suite de Tahvonen et Liski comme situation de référence la situation de passivité des zones de consommation face au cartel des producteurs. Ce choix est assez bien adapté pour le cas des pays pauvres et émergents qui sont au centre des préoccupations des deux derniers chapitres car shématiquement la taxation de la consommation d'énergie fossile y est plutôt faible pour éviter des difficultés sociales ou pour ne pas entraver la croissance économique. Toutefois on peut critiquer ce choix pour les vieux pays riches qui sont plutôt des pays dans lesquels un fiscalité forte sur la consommation d'énergie fossile existe, pas du tout d'ailleurs pour lutter contre le réchauffement climatique mais pour se procurer des recettes fiscales et sans doute en vue d'objectifs non avoués de commerce extérieur (réduire la facture des importations en comprimant la demande). On a fait ce choix pour des raisons de simplicité et de capacité à trouver des solutions analytiques mais on pourrait étudier dans des recherches futures une situation de référence plus réaliste dans laquelle les Etats des pays riches auraient érigé une fiscalité de ce type faisant d'eux des "brown governments" (ni "green governments", ni passifs face au cartel).

Enfin la nécessité de poser des hypothèses techniques assez restrictives pour obtenir des solutions analytiques peut bien naturellement être critiquée. Dans l'univers des jeux dynamiques relatifs au domaine des ressources naturelles et de la pollution les voies de passage vers des solutions analytiques (qui sont tout de même les plus facilement interprétables) paraissent parfois bien étroites. Si l'on osait dire les choses franchement, il faudrait d'ailleurs reconnaître que la recherche dans ce domaine vit depuis une quinzaine sur la contribution apportée par une série d'auteurs remarquables dont avant tout Wirl et Long. Ces choses étant dites, l'intérêt de la recherche dans ce domaine demeure très grand parce qu'il met l'accent sur les situations non coopératives qui sont légion en matière d'énergie fossile et qui sont peut - être les plus naturelles...

Bibliography

[2009] Allen, M. R., D. J. Frame, C. Huntingford, C. D. Jones, J. A. Lowe, M. Meinshausen and N. Meinshausen, 2009, Warming caused by cumulative carbon emissions towards the trillionth tonne, *Nature* 458 (7242), 1163–1166.

[2011] Amigues, J.-P., M. Moreaux and K. Schubert, 2011, Optimal use of a polluting non-renewable resource generating both manageable and catastrophic damages, *Annales d'Economie et de Statistique*, to appear.

[1998] Benchekroun, H. and N. V. Long, 1998, Efficiency inducing taxation for polluting oligopolists, *Journal of Public Economics* 70, 325–342.

[2006a] Chakravorty, U., B. Magné and M. Moreaux, 2006, Plafond de concentration en carbone et substitutions entre ressources énergétiques, *Annales d'Economie et de Statistique* 81, 141–168.

[2006b] Chakravorty, U., B. Magné and M. Moreaux, 2006, A Hotelling model with a ceiling on the stock of pollution, *Journal of Economic Dynamics and Control* 30(12), 2875–2904.

[1997] Chander, P. and H. Tulkens, 1997, The core of an economy with multilateral environmental externalities, *International Journal of Game Theory* 26, 379–401.

[2009] Chou, S. J.-H. and N. V. Long, 2009, Optimal tariffs on exhaustible resources in the presence of cartel behavior, *Asia-Pacific Journal of Accounting and Economics* 16(3), 239–254.

[1993] Dockner, E. and N. V. Long, 1993, International pollution control: Cooperative versus non-cooperative strategies, *Journal of Environmental Economics and Management* 25, 13–29.

[2000] Dockner, E., S. Jorgensen, N. V. Long and G. Sorger, 2000, *Differential games in economics and management science*, Cambridge University Press.

[2011] Dullieux, R., L. Ragot and K. Schubert, 2011, Carbon tax and OPEC's rents under a ceiling constraint, *Scandinavian Journal of Economics* 113, 798–824.

[2009] Fujiwara, K. and N. V. Long, 2009, Optimal tariffs on exhaustible resources: the case of quantity - setting, Working paper, Department of Economics, McGill University.

[2010] Fujiwara, K. and N. V. Long, 2010, Welfare implications of leadership in a resource market under bilateral monopoly, CIRANO working paper 2010s-16.

[2009] International Energy Agency, 2009, Energy prices and taxes – quarterly statistics.

[2007] Intergovernmental Panel on Climate Change, 2007, Fourth Assessment Report – Synthesis Report.

[2010] Jorgensen, S., G. Martin–Herran and G. Zaccour, 2010, Dynamic Games in the Economics and Management of Pollution, *Environmental Modelling and Assessment*, 15(6), 433–467.

[2011] Karp, L., S. Sidiqui, and J. Strand, 2011, Climate Policy with Dynamic Fossil Fuel Markets: Prices versus Quotas, mimeo.

[1979] Kemp, M.C. and N. V. Long, 1979, The interaction between resource-poor and resource-rich economies, *Austrian Economic Papers* 18, 258–267.

[1977] Kydland, F.E. and E.C. Prescott, 1977, Rules Rather than Discretion: The Inconsistency of Optimal Plans, *The Journal of Political Economy*, 85(3), 473–492.

[2004] Liski, M. and O. Tahvonen, 2004, Can carbon tax eat OPEC's rents?, *Journal of Environmental Economics and Management* 47, 1–12.

[2010] Long, N. V., 2010, *A survey of dynamic games in economics*, World Scientific.

[2011] Long, N.V., 2011, Dynamic Games in the Economics of Natural Resources: a Survey, *Dynamic Games and Applications*, 1(1), 115–148.

[2009] Meinshausen, M., N. Meinshausen, W. Hare, S.C.B. Raper, K. Frieler, R. Knutti, D.J. Frame and M.R. Allen, 2009, Greenhouse-gas emission targets for limiting global warming to 2°C, *Nature* 458 (7242), 1158–1162.

[2006] OECD, 2006, The Political Economy of Environmentally Related Taxes.

[2007] Rowat, C., 2007, Non-Linear strategies in a linear quadratic differential game, *Journal of Economic Dynamics and Control* 31(10), 3179–3202.

[2001] Rubio, S. and L. Escriche, 2001, Strategic Pigouvian taxation, stock externalities, and polluting nonrenewable resources, *Journal of Public Economics* 79, 297–313.

[1987] Seierstad, A. and K. Sydsaeter, 1987, *Optimal Control Theory with Economic Applications,* Elsevier.

[2008] Shimomura, K. and D. Xie, 2008, Advances on Stackelberg open-loop and feedback strategies, *International Journal of Economic Theory* 4, 115–133.

[2011] Strand J., 2011, Strategic Climate Policy with Offsets and Incomplete Abatement: Carbon Taxes Versus Cap-and-Trade, a paper of the World Bank.

[1995] Tahvonen, O., 1995, International CO2 taxation and the dynamics of fossil fuel markets, *International Tax and Public Finance* 2, 261–278.

[1996] Tahvonen, O., 1996, Trade with polluting nonrenewable resources, *Journal of Environmental Economics and Management* 30, 1–17.

[1990] Tsutsui, S. and K. Mino, 1990, Nonlinear strategies in dynamic competition with sticky prices, *Journal of Economic Theory* 52, 136–161.

[2010] Wei, J., M. Hennlock, D.J.A. Johansson and T. Sterner, 2010, The fossil endgame: strategic oil price discrimination and carbon taxation, working paper.

[1994] Wirl, F., 1994, Pigouvian taxation of energy for stock and flow externalities and strategic, non-competitive pricing, *Journal of Environmental Economics and Management* 26, 1–18.

[1995] Wirl, F., 1995, The exploitation of fossil fuels under the threat of global warming and carbon taxes: A dynamic game approach, *Environmental and Resource Economics* 5, 333–352.

[2007] Wirl, F., 2007, Do multiple Nash equilibria in Markov strategies mitigate the tragedy of the commons? *Journal of Economic Dynamics and Control* 31(10), 3723–3740.

[2011] Wirl, F., 2011, Global Warming: Prics versus Quantities from a strategic point of view, *Journal of Environmental Economics and Management* ...

[1995] Wirl, F. and E. Dockner, 1995, Leviathan governments and carbon taxes: Costs and potential benefits, *European Economic Review* 39, 1215–1236.